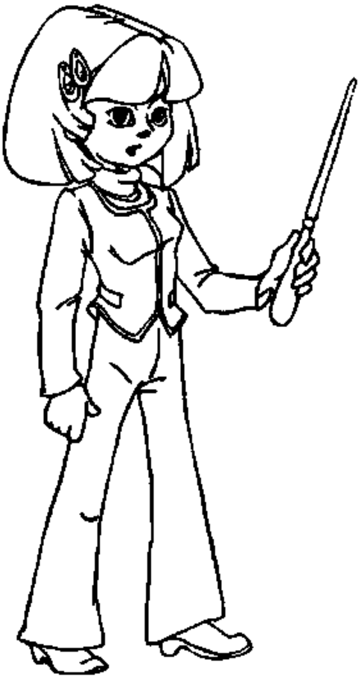
СРЕДНЯЯ ШКОЛА

Н. Н. Евдокимова

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ



санкт-петербург
·2008·
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ ПИТЕР

## ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

| | | | |
|---|---|---|---|
| A a | а | N n | эн |
| B b | бэ | O o | о |
| C c | це | P p | пэ |
| D d | дэ | Q q | ку |
| E e | э | R r | эр |
| F f | эф | S s | эс |
| G g | гэ (же) | T t | тэ |
| H h | ха (аш) | U u | у |
| I i | и | V v | вэ |
| J j | йот (жи) | W w | дубль-вэ |
| K k | ка | X x | икс |
| L l | эль | Y y | игрек, ипсилон |
| M m | эм | Z z | зет, зета |

## ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Α α | альфа | Ξ ξ | кси |
| Β β | бета | Ο ο | омикрон |
| Γ γ | гамма | Π π | пи |
| Δ δ | дельта | Ρ ρ | ро |
| Ε ε | эпсилон | Σ σ | сигма |
| Ζ ζ | дзета | Τ τ | тау |
| Η η | эта | Υ υ | юпсилон (ипсилон) |
| Θ θ | тета | | |
| Ι ι | иота | Φ φ | фи |
| Κ κ | каппа | Χ χ | хи |
| Λ λ | ламбда | Ψ ψ | пси |
| Μ μ | мю (ми) | Ω ω | омега |
| Ν ν | ню (ни) | | |

# МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

**Множество** представляет собой соединение, совокупность, собрание некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку.

*Примеры.* *Множество учащихся школы.*
*Множество букв алфавита.*
*Множество действительных чисел.*
*Множество точек на прямой.*

Предметы, из которых состоит множество, называются его элементами.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а элементы — малыми буквами.

$A = \{\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3\}$ — множество $A$ состоит из элементов $\alpha_1$; $\alpha_2$; $\alpha_3$.

Запись $\alpha \in A$ означает, что элемент $\alpha$ принадлежит множеству $A$.

Запись $\alpha \notin A$ означает, что элемент $\alpha$ не принадлежит множеству $A$.

*Пример.* $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $8 \in \mathbf{N}$; $0 \notin \mathbf{N}$; $-11 \notin \mathbf{N}$; $4 \in \mathbf{N}$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

*Пример.* Если $A = \{3;\ 5;\ 6\}$, $B = \{3;\ 5;\ 6\}$, то $A = B$.

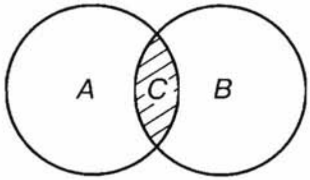
Если все элементы множества $C$ являются элементами множества $A$, то множество $C$ называется **подмножеством множества** $A$.

*Пример.* $A = \{1; 2; 3\}$, $C = \{1; 3\}$.

---

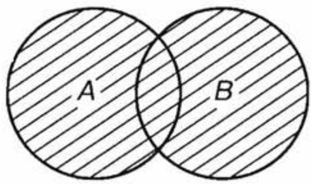
Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается $\varnothing$.

**Пересечением множеств** $A$ и $B$ называется множество $C$, состоящее из общих элементов множеств $A$ и $B$. Оно обозначается $C = A \cap B$.



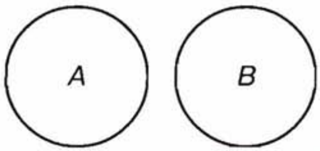

---

**Объединением множеств** $A$ и $B$ называется множество $D$, состоящее из всех элементов множеств $A$ и $B$ и только из них. Оно обозначается $D = A \cup B$.




---

Если множества $A$ и $B$ не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является **пустое множество** — $\varnothing$.




*Примеры.* Рассмотрим два множества $A$ и $B$.

1) $A = \{0; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 5\}$
   $A \cup B = \{0; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
   $A \cap B = \{0; 2; 3; 4\} \cap \{1; 2; 3; 5\} = \{2; 3\}$.

2) $A = \{0; 1; 4; 5\}$, $B = \{2; 3\}$
   $A \cup B = \{0; 1; 4; 5\} \cup \{2; 3\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
   $A \cap B = \{0; 1; 4; 5\} \cap \{2; 3\} = \varnothing$.

# ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

В элементарной математике выделяют следующие множества чисел:

$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ Множество натуральных чисел состоит из всех натуральных чисел.

Натуральные числа 1, 2, 3, ... появились в связи с необходимостью подсчета предметов.

---

$\boldsymbol{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}$

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и ноль составляют множество целых чисел.

---

$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{m}{n}\right\}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$

Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел.

---

$\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{X}\}$, где $-\infty < \boldsymbol{X} < +\infty$

Множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей называется множеством действительных чисел (рациональных и иррациональных).

---

Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

---

Иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью.

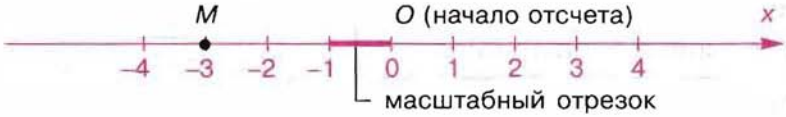
*Пример.*

1) $\frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots = 0{,}(45)$; $\frac{6}{25} = 0{,}24$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$ — *рациональные числа*.

2) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$; $\pi = 3{,}14159\ldots$ — *иррациональные числа*.

# ЧИСЛОВАЯ ОСЬ. КООРДИНАТА ТОЧКИ

Прямая с указанной начальной точкой, выбранным положительным направлением отсчета и масштабным отрезком, длина которого принимается равной единице, называется **числовой осью**.




Каждое число можно изобразить точкой числовой оси. Наоборот, каждая точка оси изображает какое-нибудь число.

Если число $x$ изображается точкой $M$, то это число называется координатой точки $M$.

Точка $O$ разбивает координатную прямую на два луча, один из которых имеет положительное направление и называется положительным лучом, другой — отрицательным.

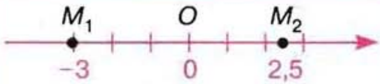
## Модуль числа

Модулем числа $x$ называется расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число $x$. →

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

$|5| = 5$; $|-6| = 6$; $|0| = 0$.

Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа. →




$$|M_1M_2| = |-3 - 2{,}5| = \\ = |-5{,}5| = -(-5{,}5) = +5{,}5$$

$|x| = 3$ — это соотношение геометрически означает, что расстояние от точки до начала координат равно 3: $x_1 = -3$, $x_2 = +3$.

# АРИФМЕТИКА

## ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Число называется **простым**, если его делителями являются только единица и само число.

Остальные числа называются **составными**.

→ 2, 3, 5, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 и т. д.

Число 1 не относят ни к простым, ни к составным.

**Наибольшим общим делителем (НОД)** нескольких натуральных чисел называется самое большое натуральное число, на которое все эти числа делятся.

Для нахождения НОД каждое из чисел раскладывают на простые множители и вычисляют произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

*Пример.* Найти НОД чисел 126; 540; 630.

*Решение.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 126 | 2 | 540 | 2 | 630 | 2 |
| 63 | 3 | 270 | 2 | 315 | 3 |
| 21 | 3 | 135 | 3 | 105 | 3 |
| 7 | 7 | 45 | 3 | 35 | 5 |
| 1 | | 15 | 3 | 7 | 7 |
| | | 5 | 5 | 1 | |
| | | 1 | | | |

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$;
$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
НОД $(126; 540; 630) = 2 \cdot 3^2 = 18$

**Наименьшим общим кратным (НОК)** нескольких натуральных чисел называется самое наименьшее число, которое делится на все эти числа.

Для нахождения НОК каждое из чисел раскладывают на простые множители и вычисляют произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

*Пример.* Найти НОК чисел 270; 300; 315.

*Решение.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 270 | 2 | 300 | 2 | 315 | 3 |
| 135 | 3 | 150 | 2 | 105 | 3 |
| 45 | 3 | 75 | 3 | 35 | 5 |
| 15 | 3 | 25 | 5 | 7 | 7 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 1 | |
| 1 | | 1 | | | |

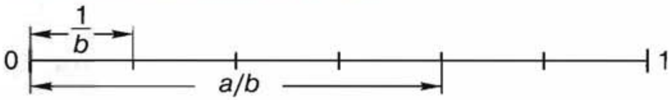
$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$;
$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
НОК $(270; 300; 315) =$
$= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18900$

# ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

| | |
|---|---|
| **Признак делимости на 2**<br>На 2 делятся числа, оканчивающиеся нулем или четной цифрой. Число, делящееся на 2, называется четным. | *Пример.* 345 не делится на 2, т. к. 5 — нечетная цифра; 18358 делится на 2, т. к. 8 — четная цифра. |
| **Признак делимости на 4**<br>На 4 делятся числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4. | *Пример.* 34800 — делится на 4; 15164 — делится на 4, т. к. 64 делится на 4; 115 — не делится на 4. |
| **Признак делимости на 25**<br>На 25 делятся числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25. | *Пример.* На 25 делятся числа 100, 1000, 125, 350, 675 т. к. последние две цифры нули или делятся на 25. |
| **Признак делимости на 3 и на 9**<br>На 3 (на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (на 9). | *Пример.* 381 делится на 3 и не делится на 9, т. к. $3 + 8 + 1 = 12$ делится на 3 и не делится на 9. |
| **Признак делимости на 5**<br>На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. | *Пример.* На 5 делятся числа 85, 160, 345, 2345 и т. д.; 243 не делится на 5, т. к. последняя цифра 3. |
| **Признак делимости на 6**<br>На 6 делятся числа, которые одновременно делятся на 2 и 3. | *Пример.* 342 делится на 6, т. к. число делится на 2 и на 3. |
| **Признаки делимости на 10, 100 и 1000**<br>На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.<br>На 100 делятся числа, оканчивающиеся двумя нулями. На 1000 делятся числа, у которых три последние цифры нули. | *Пример.* 320, 8400 делятся на 10;<br>54000 делится на 10, 100 и 1000. |

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Выражение вида $\frac{a}{b}$ или $a : b$, где $a$ и $b$ целые числа и $b \neq 0$, называется дробью.




Число $a$ называется **числителем** дроби. Число $b$ называется **знаменателем** дроби.

$a < b$ → $a/b$ — правильная дробь → $\frac{2}{7}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}$

$a \geq b$ → $a/b$ — неправильная дробь → $\frac{4}{4} = 1; \frac{7}{5}; \frac{6}{5}$

| | |
|---|---|
| Из любой неправильной дроби можно выделить целую часть и дробную часть. | $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$, где 2 — целая часть от деления числа 13 на 5, а 3 — остаток. |
| Основное свойство дроби<br>Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными если $a \cdot d = b \cdot c$. | $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, т. к. $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. |
| $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ — дробь не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же число. | $\frac{18}{30} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{3}{5}$ — сокращение дроби. |

## Действия над дробями $\left(\frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{d}\right)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Сложение и вычитание | 1) $b = d$, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b}$.<br>2) $b \neq d$ дроби нужно привести к общему знаменателю:<br>$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm cb}{bd}$.<br>Общим знаменателем будет НОК ($b$, $d$). | Умножение | 1) $k$ — целое число, $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$<br>2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ |
| | | Деление | 1) $\frac{a}{b} : k = \frac{a}{b \cdot k}$<br>2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ |

## СРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Из двух чисел то больше, которое на координатной прямой расположено правее.

| | |
|---|---|
| Любое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа. | |
| Любое отрицательное число меньше нуля. | |
| Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше. | $-3{,}8 > -5{,}1$, т. к. $\lvert -3{,}8 \rvert < \lvert -5{,}1 \rvert$ |

### Действия с рациональными числами

| | | |
|---|---|---|
| Сложение | Чтобы сложить числа с одинаковыми знаками, нужно сложить их модули и поставить к сумме их общий знак. | $-20 - 8 - 6 = -34$; $26 + 5 + 1 = 32$. |
| | Чтобы сложить два числа с разными знаками, нужно из большего модуля числа вычесть меньший модуль числа и поставить к сумме знак большего модуля числа. | $(+4) + (-10) =$ $= -(10 - 4) = -6$; $(-3) + (+12) =$ $= +(12 - 3) = +9$. |
| | Сумма противоположных чисел равна нулю. | $(+6) + (-6) = 0$. |
| Вычитание | Чтобы вычесть из числа $a$ число $b$, достаточно к уменьшаемому прибавить число противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$. | $-5 - (+3) = (-5) + (-3) = -8$; $4 - (-2) = 4 + 2 = 6$. |
| Умножение и деление | Произведение двух чисел одного знака есть число положительное. | $(-6) \cdot (-2{,}3) = 13{,}8$. |
| | Произведение двух чисел с разными знаками есть число отрицательное. | $(+6) \cdot (-2{,}3) = -13{,}8$. |
| | Если хотя бы один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю. | $(-3{,}4) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 7 = 0$. |
| | Произведение нескольких чисел есть число положительное, если число сомножителей со знаком минус четное, и отрицательное, если число сомножителей со знаком минус нечетное. | $(-3) \cdot (-2) \cdot (+6) = 36$; $(-2) \cdot (+4) \cdot (+3) = -24$. |
| | Аналогично производится деление. | $(+24) : (-3) = -8$; $(-18) : (-9) = 2$. |

# ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д. называют **десятичной дробью.**

$$\frac{3}{10}=0,3 \quad \frac{51}{100}=0,51 \quad \frac{7}{1000}=0,007$$

6,125 →

6 — целая часть числа;
1 — десятые доли единицы;
2 — сотые доли единицы;
5 — тысячные доли единицы.

$$6,125=6+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

## Свойства десятичных дробей

| | |
|---|---|
| 1. Десятичная дробь не изменит величины, если к ней справа приписать любое количество нулей. | 15,8 = 15,80 = 15,800 и т. д. |
| 2. Десятичная дробь увеличится в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести на один, два, три и т. д. знака вправо. | Число 13,21 увеличится в 10 раз, если напишем: 132,1. |
| 3. Десятичная дробь уменьшится в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести на один, два, три и т. д. знака влево. | Число 13,21 уменьшится в 100 раз, если напишем: 0,1321. |

## Превращение десятичной дроби в обыкновенную дробь

Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. →

$$0,7=\frac{7}{10}$$

$$0,25=\frac{25}{100}$$

$$0,007=\frac{7}{1000}$$

### Превращение обыкновенной дроби в десятичную

Чтобы превратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно выполнить деление числителя на знаменатель «столбиком».

Заметим, что при этом может получиться конечная десятичная дробь или бесконечная периодическая десятичная дробь.

$$\frac{7}{25} = 0,28$$

$$\begin{array}{r|l} -\,7{,}0 & 25 \\ \underline{50} & 0{,}28 \\ -\,200 & \\ \underline{200} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$$

## ПОРЯДОК АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

При выполнении арифметических действий соблюдается следующий порядок:

1. Выполняются действия, заключенные в скобки. При этом вначале производится умножение и деление, затем сложение и вычитание.

2. Выполняются действия без скобок. При этом также вначале производится умножение и деление, затем сложение и вычитание.

3. Если выражение, заключенное в скобки, также содержит скобки, то вначале выполняются действия во внутренних скобках.

*Примеры.*

1) $6 + (5 + 2) \cdot 8 - 4 = 6 + 7 \cdot 8 - 4 = 6 + 56 - 4 = 58.$

2) $81 : 9 - 2 \cdot (8 - 3 \cdot 2) = 81 : 9 - 2 \cdot (8 - 6) =$
$= 81 : 9 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$

3) $9 + 2 \cdot (14 - 30 : (2 \cdot 4 - 3)) = 25.$
$2 \cdot 4 = 8$; $8 - 3 = 5$; $30 : 5 = 6$; $14 - 6 = 8$; $2 \cdot 8 = 16$; $9 + 16 = 25.$

# АЛГЕБРА

## ВОЗВЕДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}$$

$a$ — основание степени;
$k$ — показатель степени.

Степенью числа $a$ с показателем $k$, где $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Q}$, называется произведение $k$ множителей, каждый из которых равен $a$.

$0^k = 0$  $1^k = 1$

| |
|---|
| Четная степень отрицательного числа есть число положительное $(-2)^2 = 4$. |
| Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное $(-2)^3 = -8$. |
| Любая степень положительного числа есть число положительное $2^5 = 32$. |

## ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

| | | |
|---|---|---|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$<br>$m, n \in \mathbf{N}$ | При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним. | $x^2 \cdot x^4 = x^6$ |
| $a^m : a^n = a^{m-n}$<br>$m, n \in \mathbf{N}$ | При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается прежним. | $\frac{x^6}{x^4} = x^2$<br>$2^5 : 2^2 = 2^3 = 8$ |
| $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$<br>$m, n \in \mathbf{N}$ | При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним. | $(x^2)^3 = x^6$<br>$(3^2)^2 = 3^4 = 81$ |

| | |
|---|---|
| $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ | 1) $(5 \cdot 2 \cdot 10)^2 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 10^2 = 25 \cdot 4 \cdot 100 = 10000$;<br>2) $\dfrac{2^8 \cdot 7^8}{14^6} = \dfrac{2^8 \cdot 7^8}{2^6 \cdot 7^6} = 2^2 \cdot 7^2 = 4 \cdot 49 = 196$. |
| $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ | 1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^2}{3^3} = \dfrac{8}{27}$;<br>2) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 : \dfrac{6}{25} = \dfrac{3^3}{5^3} \cdot \dfrac{25}{6} = \dfrac{27}{125} \cdot \dfrac{25}{6} = \dfrac{9}{5 \cdot 2} = \dfrac{9}{10}$. |

## СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ, НУЛЕВЫМ И ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

| | |
|---|---|
| **Отрицательная степень**<br>$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ | $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$;<br>$(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$. |
| **Нулевая степень**<br>$a^0 = 1$ | $5^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$. |
| **Дробная степень**<br>$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ | $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$; $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$. |

*Примеры.*

1) $(-3)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot (-6)^2 = \left(-\dfrac{3 \cdot 1 \cdot 6}{3}\right)^2 = 36.$

2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-0,5)^2 \cdot (-4) = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(\left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-4)\right)^3 =$

$= \dfrac{1}{16} \cdot 8 = \dfrac{1}{2}.$

3) Найдите значение выражения:

$$\frac{14^{10}}{2^8 \cdot 7^9} \cdot \frac{13^6 \cdot 8^4}{26^6} = \frac{(7 \cdot 2)^{10} \cdot 13^6 \cdot (2^3)^4}{2^8 \cdot 7^9 \cdot (13 \cdot 2)^6} = \frac{7^{10} \cdot 2^{10} \cdot 13^6 \cdot 2^{12}}{2^8 \cdot 7^9 \cdot 13^6 \cdot 2^6} =$$

$$= 7^{10-9} \cdot 2^{22-14} = 7 \cdot 2^8 = 7 \cdot 256 = 1792.$$

# ДЕЙСТВИЯ С КОРНЯМИ

**Арифметическим корнем** $n$-й степени из неотрицательного числа $a$ называется неотрицательное число $b$, для которого $b^n = a$.

$\sqrt[n]{a} = b$ при $a \ge 0$; $b \ge 0$. *Например:* $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$.

| | |
|---|---|
| $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}$, $a \ge 0$ | $\sqrt{4} = \sqrt[2\cdot 3]{4^3} = \sqrt[6]{64}$. |
| $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$, $a \ge 0$; $b \ge 0$; $c \ge 0$ | $\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt[3]{c^5} = \sqrt[3]{a^2bc^5}$; $\sqrt{a^3b}\,\sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4b^4} = a^2b^2$. |
| $\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}$, $a \ge 0$; $b \ge 0$; $c \ge 0$ | $\sqrt{a^4b^3} = \sqrt{a^4}\,\sqrt{b^3} = a^2\sqrt{b^3}$; $\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. |
| $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, $a \ge 0$ | $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \left(\sqrt{3}\right)^3$. |
| $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$, $a \ge 0$ | $\left(\sqrt[3]{c^2d}\right)^2 = \sqrt[3]{c^4d^2} = \sqrt[3]{c^3cd^2} = c\sqrt[3]{cd^2}$. |
| $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $a \ge 0$; $b \ge 0$ | $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$. |
| $\sqrt[m]{a^k} = \sqrt[m:n]{a^{k:n}}$, $a \ge 0$ | $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6:3]{a^{3:3}} = \sqrt{a}$; $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$. |

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

## Законы сложения и умножения

| |
|---|
| 1. Переместительный закон: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$ |
| 2. Сочетательный закон: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$ |
| 3. Распределительный закон: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ |

## Одночлены и многочлены

**Одночленом** называется выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней.

$3ax^4$; $-2b^3$; $n$; $17$.

Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей переменных.

$8x^4y^2$ — одночлен шестой степени;
$3x$ — одночлен первой степени;
$5$ — одночлен нулевой степени;
$2abc$ — одночлен третьей степени.

Стандартным видом одночлена называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных: $4a^2bc$; $0{,}8x^2y^2c$; $-3a^2b^3c$.

*Пример.* Представить одночлен в стандартном виде и назвать его коэффициент: $2a^2bc^2 \cdot (-3ab^3c^2) \cdot (4abc^3) =$

$= 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (a^2 \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b^3 \cdot b) \cdot (c^2 \cdot c^2 \cdot c^3) = -24a^4b^5c^7$.

(используя 1 и 2 законы умножения)

Коэффициент одночлена равен $(-24)$.

**Многочленом** называется алгебраическая сумма одночленов.

*Например:* $2a^2 - 3ax^5 - 3$.

Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен.

*Например:* $2x^2 - 5x + 6$ — многочлен второй степени.

## Преобразование суммы и разности многочленов

Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется многочленом стандартного вида.

Преобразовать разность многочленов в многочлен стандартного вида: → $(5x^2 - 4x + 3) - (3x^2 - x + 2)$

1. Раскроем скобки по правилу:

| | |
|---|---|
| Если перед скобкой стоит знак «плюс», то следует сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки. | Если перед скобкой стоит знак «минус», то, раскрывая скобки, надо знаки слагаемых поменять на противоположные. |

2. Приведем подобные члены (слагаемые):

Чтобы привести подобные слагаемые, достаточно сложить их коэффициенты и полученное число умножить на буквенное выражение. Производится на основе закона 3:

$$5x^2 - 3x^2 = 2x^2; \ -4x + x = -3x.$$

$$(5x^2 - 4x + 3) - (3x^2 - x + 2) = 5x^2 - 4x + 3 - 3x^2 + x - 2 = 2x^2 - 3x + 1$$

## Умножение одночлена на многочлен

— выполняется по распределительному закону 3.

*Например:* $x(3a - 2x) = 3ax - 2x^2$; $5a(6a + 3x) = 30a^2 + 15ax$.

## Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить.

*Например:* $5x(x - y) + (2x + y)(x - y) =$

$= 5x^2 - 5xy + 2x^2 - 2xy + xy - y^2 = 7x^2 - 6xy - y^2$.

## Разложение многочленов на множители

| Преобразование многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены). | → | $2a^2b^3 + 8ab^2 = 2ab^2(ab + 4)$ |
|---|---|---|

1. Вынесение общего множителя за скобки выполняется по распределительному закону 3:

1) $x^3 + 3x^2 + 4x^4 = x^2(x + 3 + 4x^2)$;

2) $4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(2x^3 - 4x^2 + x - 3)$.

2. Группировка. Для этого надо объединить в группы те члены, которые имеют общие множители, и вынести общий множитель за скобки в каждой группе:

1) $ax + 2a - 3x - 6 = (ax + 2a) - (3x + 6) = a(x + 2) - 3(x + 2) =$
$= (x + 2)(a - 3)$;

2) $x^2 - 2x - xy + 2y = (x^2 - xy) + (2y - 2x) = x(x - y) - 2(x - y) =$
$= (x - 2)(x - y)$.

3. Применение формул сокращенного умножения позволяет разложить многочлен на множители:

1) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$;

2) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

## Формулы сокращенного умножения

| | |
|---|---|
| $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | Разность квадратов |
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | Квадрат суммы |
| $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | Квадрат разности |
| $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | Разность кубов |
| $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | Сумма кубов |
| $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | Куб суммы |
| $(a - b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - b^3$ | Куб разности |

$1 + 1 = 2$
$a^2 - b^2 =$
$= (a - b)(a + b)$

## Тождества и уравнения

$ax = b$
$x^2 + px + q = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$

**Тождеством** называется равенство (числовое или буквенное), справедливое при всех числовых значениях входящих в него букв.

$6 + 3 = 4 + 5$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

**Уравнением** $f(x) = g(x)$ называется равенство, содержащее неизвестные переменные. По числу неизвестных уравнения разделяются на уравнения с одним, двумя, тремя и т. д. неизвестными.

**Решением уравнения** (корнями) называются все значения переменной, при которых уравнение обращается в верное равенство.

**Решить уравнение** — значит найти множество его корней или доказать, что их нет.

**Областью определения (ОДЗ)** уравнения называется множество всех $x$, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$:

Для того чтобы найти область определения уравнения, необходимо найти пересечение множеств, на которых определены данные функции $f(x)$ и $g(x)$.

*Пример.* Найти область определения уравнения:

$\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{-x}$;
$f(x) = \sqrt{x+3}, \; x + 3 \geq 0$;
$D_1(f) = [-3; +\infty)$;
$g(x) = 1 + \sqrt{-x}, \; -x \geq 0$;
$D_2(g) = (-\infty; 0], \; x \leq 0$;
$D = D_1 \cap D_2 = [-3; 0]$.

Решая уравнение, заменяют исходное уравнение равносильным уравнением.

## Равносильность уравнений

Два уравнения называются равносильными, если совпадают множества их решений на данном числовом множестве.

*Пример.* Уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $(x - 1)(x + 1) = 0$ равносильны, они имеют корни $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Равносильность уравнений сохраняется при следующих операциях (основные приемы решения уравнений):

1. Замена выражения на тождественно равное ему.
2. Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением их знака на противоположный.
3. Умножение и деление обеих частей уравнения на одно и то же число, не равное нулю.

$6(x + 4) = 3 - 2x \Leftrightarrow 6x + 24 = 3 - 2x \Leftrightarrow 6x + 2x = 3 - 24 \Leftrightarrow 8x = -21$

$$x = -\frac{21}{8} = -2\frac{5}{8}$$

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax + b = 0$, где $a$ и $b$ некоторые числа, называется линейным уравнением.

| |
|---|
| Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$. |
| Если $a = 0$; $b \neq 0$, то линейное уравнение не имеет решений. |
| Если $a = 0$; $b = 0$, то $x$ — любое число. |

*Пример.* $2x - 3 + 4(x - 1) = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 + 4x - 4 = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x = 5 + 4 + 3 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2.$

*Ответ:* $\{2\}$.

# КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a$, $b$, $c$ — некоторые числа ($a \neq 0$), $x$ — переменная, называется **квадратным уравнением**.

Формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Для решения уравнения следует вычислить дискриминант $D = b^2 - 4ac$

| Значение $D$ | Количество решений уравнения | |
|---|---|---|
| $D = 0$ | одно решение | $x = -\frac{b}{2a}$ |
| $D > 0$ | два решения | $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ |
| $D < 0$ | нет решений | $\varnothing$ |

## Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители следующим образом: решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и найдем корни этого уравнения $x_1$ и $x_2$. Тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

*Пример.* Разложить на множители выражение $2x^2 - 3x + 1$ → Решаем уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$ → Находим корни уравнения $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$ → *Ответ:* $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x - 1)(x - 1)$

# ПРИВЕДЕННОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, где $p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$, называется **приведенным квадратным уравнением**.

Формула корней приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Решения приведенного квадратного уравнения можно быстро найти, используя теорему Виета.

## Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

*Пример.* Решить уравнение $x^2 + 5x - 6 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases}$ подбираем значения: $x_1 = 1$, $x_2 = -6$

Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ можно разложить на множители $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Если $q = 0$, уравнение принимает вид: $x^2 + px = 0$.

$x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(x + p) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + p = 0 \end{array}\right.$ Решение: $x_1 = 0$, $x_2 = -p$.

Если $p = 0$, уравнение принимает вид $x^2 + q = 0$.

Решение: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}; q \le 0$

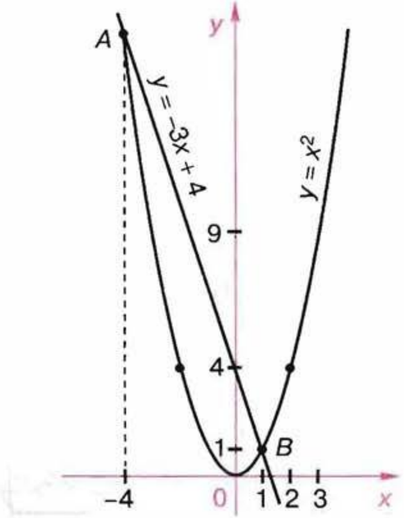
# ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение $ax^2 = bx + c = 0$ заменим равносильным уравнением $ax^2 = -bx - c$.

Построим графики функций $y = ax^2$ и $y = -bx - c$ в одной системе координат.

В точках $x_1$ и $x_2$ значения обеих функций равны, следовательно $x_1$ и $x_2$ являются корнями уравнения $ax^2 = bx + c = 0$.

| Решить графически уравнение: | $x^2 + 3x - 4 = 0$ |
|---|---|
| Заменяем исходное уравнение равносильным. | $x^2 = -3x + 4$ |
| Строим график функции. | $y = x^2$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}$ |
| Строим график функции. | $y = -3x + 4$ $\begin{array}{c\|c\|c} x & 0 & 1\frac{1}{3} \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$ |




Находим абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -3x + 4$.

Значения корней:

$x_1 = -4$ и $x_2 = 1$.

# РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

**Рациональным** называется уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Решение данного уравнения сводится к решению уравнения $P(x) = 0$ и проверке того, что его корни удовлетворяют условию $Q(x) \neq 0$, т. е. уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

| Решить уравнение | $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = 1$ |
|---|---|
| Приведем уравнение к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ | $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - 1 = 0$<br>$\frac{(x-2) + 2(x+1) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 0$<br>$\frac{x^2 - 4x - 2}{(x+1)(x-2)} = 0$ |
| Заменим уравнение равносильной системой: | $\begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0 \\ (x+1)(x-2) \neq 0 \end{cases}$ |
| Область допустимых значений уравнения (ОДЗ): | $x + 1 \neq 0$ и $x - 2 \neq 0$;<br>$x \neq -1$ и $x \neq 2$ |
| Решаем приведенное квадратное уравнение и находим корни: | $x^2 - 4x - 2 = 0$<br>$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+2}$<br>$x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$ |
| В ответ записывают только те решения, которые входят в ОДЗ: | $\{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$ |

# СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ где $x$, $y$ — неизвестные, $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ — данные числа.

Решить систему — значит найти все ее решения.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система называется **определенной**, если она имеет конечное число решений, и **неопределенной**, если она имеет бесконечное множество решений.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

## Три способа решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными

1. Способ подстановки состоит в том, что из какого-либо уравнения системы выражают одно неизвестное через другие неизвестные, а затем подставляют значение этого неизвестного в остальные уравнения.

| | |
|---|---|
| Решить систему уравнений: | $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ |
| Из первого уравнения выражаем неизвестное: | $x = \dfrac{8 - 3y}{2}$ |
| Подставляем это выражение во второе уравнение и получаем систему уравнений: | $\begin{cases} x = \dfrac{8 - 3y}{2} \\ 3 \cdot \dfrac{8 - 3y}{2} + 2y = 7 \end{cases}$ |
| Решая второе уравнение, получаем $y$: | $24 - 9y + 4y = 14 \Leftrightarrow 5y = 10 \Leftrightarrow y = 2$ |
| С учетом значения $y$ находим $x$ из первого уравнения: | $x = \dfrac{8 - 3 \cdot 2}{2} = 1$ <br> *Ответ:* (1; 2). |

2. Способ сложения. При решении системы этим способом мы переходим к равносильной системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

| | |
|---|---|
| Решить систему уравнений: | $\begin{cases} 4x - 7y = -12 \\ 6x + 3y = -18 \end{cases}$ (1) |
| Умножим все члены первого уравнения на –3, а второго уравнения на 2: | $\begin{cases} -12x + 21y = 36 \\ 12x + 6y = -36 \end{cases}$ (2) |
| Почленно сложим уравнения системы (2): | $27y = 0$; $y = 0$ |
| Запишем равносильную систему взяв любое из уравнений системы (1): | $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - 7y = -12 \end{cases}$ (3) |
| Решением системы (3), а следовательно и системы (1), является пара чисел: | $4x = -12$; $x = -3$ Ответ: (–3; 0). |

3. Графический способ. Графическое решение системы уравнений с двумя переменными сводится к отысканию координат общих точек графиков уравнений.

Графиком линейного уравнения является прямая на плоскости. Каждое уравнение изображаем на графике прямой.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

| Взаимное положение прямых | Количество решений системы | Отношение коэффициентов | Пример |
|---|---|---|---|
| 1. Прямые пересекаются в одной точке $(x_0; y_0)$. | единственное | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ | $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$ |
| 2. Прямые параллельны и не совпадают. | нет решений | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ | $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ |
| 3. Прямые совпадают. | бесконечное множество решений | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ | $\begin{cases} 9x-15y=21 \\ 6x-10y=14 \end{cases}$ |

Решить графическим способом систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$

1. Построим график $2x + 3y = -4$ по двум точкам, расположенным на осях $Ox$ и $Oy$.

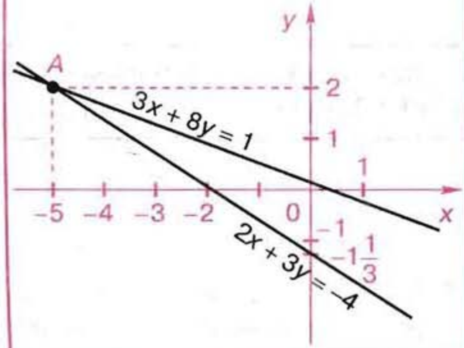
На оси $Oy$: $x = 0$, $2 \cdot 0 + 3 \cdot y = -4$

На оси $Ox$: $y = 0$, $2x + 3 \cdot 0 = -4$

$(\cdot)\left(0; -1\frac{1}{3}\right)$ $(\cdot)(-2; 0)$.

2. Через точки с координатами $\left(0; -1\frac{1}{3}\right)$ и $(-2; 0)$ проведем прямую.

3. Построим график $3x + 8y = 1$.




На оси $Oy$: $x = 0$, $y = \frac{1}{8}$

$(\cdot)\left(0; \frac{1}{8}\right)$

На оси $Ox$: $y = 0$, $3x + 8 \cdot 0 = 1$

$x = \frac{1}{3}$ $(\cdot)\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

4. Оба графика пересекаются в точке $A(-5; 2)$.

Система имеет единственное решение: $x = -5$, $y = 2$.

# НЕРАВЕНСТВА, ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Два выражения, соединенные одним из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$, **образуют неравенство**.

$$x > y$$
$$ax + b \leq cx + d$$
$$10 > 8$$

**Решить неравенство** — значит указать границы, в которых должны заключаться (действительные) значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

Решить неравенство
$$-2x > 4$$
Неравенство верно, если $x < -2$

| Свойства | Примеры |
|---|---|
| 1. Если $a > b$, то $b < a$. | $3x + 1 > 5x - 8 \Rightarrow 5x - 8 < 3x + 1$ |
| 2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. | $x > 3y$, $3y > 12 \Rightarrow x > 12$ |
| 3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство. | Если $a > b$, то $a + c > b + c$ или $a - c > b - c$<br>$x + 5 > 2 \Rightarrow x + 5 - 5 > 2 - 5$<br>$x > -3$ |
| 4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство. | $a + b > c \Leftrightarrow a - c > -b$<br>$x + 9 > 4 \Rightarrow x > 4 - 9 \Rightarrow x > -5$ |
| 5. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же *положительное число*, то получится верное неравенство. | $a > b \Leftrightarrow 5a > 5b$<br>$\frac{a}{6} > \frac{b}{2} \Leftrightarrow a > 3b$ |
| 6. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же *отрицательное число, и изменить знак неравенства на противоположный*, то получится верное неравенство. | $a > b \Rightarrow -a < -b$<br>$-2x > 6(-2) \Rightarrow x < -3$ |

## ДЕЙСТВИЯ С НЕРАВЕНСТВАМИ

| | |
|---|---|
| 1. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. | $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} a > b \\ c > d \end{array} \\ \hline a + c > b + d \end{array}$ или $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} a < m \\ b < n \end{array} \\ \hline a + b < m + n \end{array}$ |
| 2. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого производится вычитание. | $\begin{array}{r} - \begin{array}{r} a < b \\ c > d \end{array} \\ \hline a - c > b - d \end{array}$ |
| 3. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать. | Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$ |
| 4. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень или извлекать корень одной и той же степени. | Если $a > b$, то $a^k > b^k$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, где $a > 0$, $b > 0$; $k, n \in \boldsymbol{N}$ |

## НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

| | |
|---|---|
| 1. Модуль суммы не превосходит суммы модулей $\|a+b\| \le \|a\|+\|b\|$, где $a$ и $b$ — произвольные числа. | $a = 4$, $b = -5$, $a + b = -1$<br>$\|a + b\| = 1$, $\|a\| = 4$, $\|b\| = 5$,<br>$\|a\| + \|b\| = 9$ |
| 2. $\|a-b\| \ge \|a\|-\|b\|$, $a$ и $b$ — произвольные числа. | |
| 3. Среднее арифметическое двух положительных чисел больше среднего геометрического этих чисел: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ $a > 0$, $b > 0$ | $a = 2$, $b = 8$<br>$\sqrt{ab} = 4$, $\frac{a+b}{2} = 5$ |
| 4. Сумма двух взаимообратных чисел не меньше 2: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ | $\frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{4+25}{10} = \frac{29}{10} = 2{,}9$ |

# РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

**Линейным** называется неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$), где $a \neq 0$, $a$ и $b$ — числа.

Если $a > 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x > \frac{b}{a}$ или $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x \leq \frac{b}{a}$ или $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$.

*Пример.* Решить неравенство: $x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$

$$x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3} \Rightarrow x - \frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{4} + \frac{x-2}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12x - 6x - 6 - 3x + 9 + 4x - 8}{12} > 0 \Rightarrow \frac{7x-5}{12} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - 5 > 0,\ 12 > 0 \Rightarrow 7x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{7}$$

*Ответ:* $\left(\frac{5}{7}; +\infty\right)$

# РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

**Квадратным неравенством** называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$ (вместо знака $>$ может стоять любой из знаков $\geq$, $\leq$, $<$).

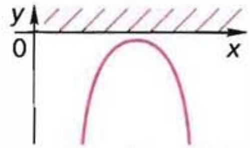
Рассмотрим неравенство $ax^2 + bx + c > 0$. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ могут быть три случая:

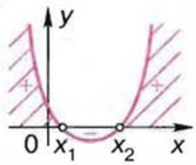
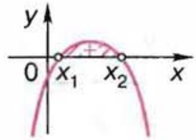
**1.** $D < 0$, $a > 0$. График квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось $Ox$ и лежит выше этой оси.

Множество решений неравенства есть вся числовая ось: $x \in \mathbf{R}$.

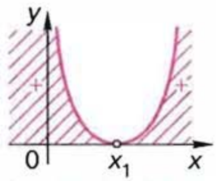

$D < 0$, $a < 0$. График квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось $Ox$ лежит ниже этой оси.

Нет решений: $x \in \varnothing$.



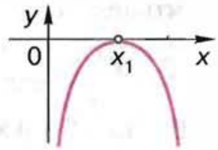
| | |
|---|---|
| **2.** $D > 0$, $a > 0$. График $f(x) = ax^2 + bx + c$ пересекает ось $Ox$ в точках $x_1$ и $x_2$, служащих корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.<br>Решением неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ являются два промежутка:<br>$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.<br>$D > 0$, $a < 0$.<br>Решением неравенства<br>$ax^2 + bx + c > 0$<br>является промежуток $(x_1; x_2)$;<br>$x \in (x_1; x_2)$. | <br> |

**3.** $D = 0$, $a > 0$.



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$

$D = 0$, $a < 0$.



$x \in \varnothing$

График квадратного трехчлена касается оси $Ox$ в точке $x_1$, являющейся единственным корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Точка $x_1$ разбивает числовую прямую на два промежутка $(-\infty; x_1)$ и $(x_1; +\infty)$.

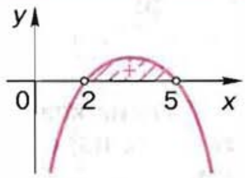
*Пример.* Решить неравенство: $-x^2 + 7x - 10 > 0$

Находим корни трехчлена, решая уравнение $-x^2 + 7x - 10 = 0$ по теореме Виета. →

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{matrix}$$

$a = -1$, $a < 0$.
График функции
$y = -x^2 + 7x - 10$ — парабола, ветви которой направлены вниз. →



*Ответ:* $(2; 5)$.

# РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

**Рациональным неравенством** называется неравенство вида $P(x) > 0$ ($P(x) < 0$);

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\left(\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\right)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ можно представить в виде произведения линейных множителей.

Для применения **метода интервалов** надо:

1. Разложить многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ на линейные множители.
2. Найти корень каждого множителя и нанести все корни на числовую ось.
3. Определить знак неравенства справа от большего корня.
4. Проставить знаки в остальных интервалах, учитывая четное или нечетное число раз встречается каждый корень.

Используется следующее ПРАВИЛО:

Если линейные множители различны (имеют разные корни), то произведение изменяет знак при переходе от каждого интервала числовой оси к соседнему (знаки будут чередоваться). Поэтому достаточно определить знак на крайнем правом интервале.

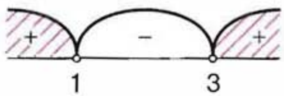
*Пример 1.* Решить неравенство: $(x - 1)(x - 3) > 0$.

Находим корни множителей:

$x - 1 = 0 \qquad x_1 = 1$

$x - 3 = 0 \qquad x_2 = 3$

Наносим корни на числовую ось:




Находим знак на крайнем правом интервале.

Например, при $x = 4$: $(4 - 1)(4 - 3) > 0$, знак плюс.

*Ответ:* $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

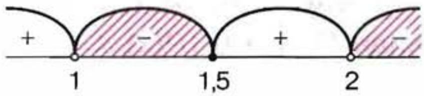
*Пример 2.* Решить неравенство: $\dfrac{3-2x}{x^2-3x+2} \le 0$; ОДЗ $x \ne 2$; $x \ne 1$.

Находим корни множителей:

$3-2x=0 \qquad x_1 = 1{,}5$

$x^2-3x+2=0 \qquad x_2 = 2;\ x_3 = 1$

Наносим корни на числовую ось:




Определяем знак на крайнем правом интервале: при $x = 3$ выражение имеет отрицательное значение.

---

Отмечаем точки на числовой прямой, в которых происходит смена знака. При этом примем во внимание, что числитель может быть равен нулю, а знаменатель не может.

*Пример 3.* Решить неравенство: $\dfrac{(x+1)^3\,(x-2)^2}{(x-1)^4} \ge 0$;

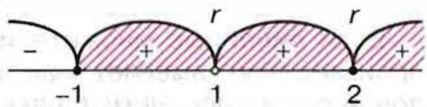
ОДЗ $x \ne 1$.

Находим корни множителей: –1, 2, 1.

Корень (–1) — встречается 3 раза,

корень 2 — 2 раза

и корень 1 — 4 раза.




**Ответ:** $[-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$

---

Если корень встречается четное число раз, то при переходе через корень знак не изменяется, если нечетное — то при переходе через корень знак меняется.

Обозначения:

• — точка на числовой оси, включенная в интервал;

∘ — точка, не включенная в интервал.

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

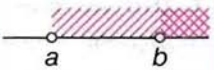
**Решить систему неравенств** — значит найти множество общих решений двух или нескольких неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется **решением системы неравенств**. Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

$\begin{cases} 3x-1>2 \\ 3x-1<8 \end{cases}$ — систему неравенств можно записать так: $2 < 3x - 1 < 8$

Решение системы линейных неравенств сводится к следующим случаям (считаем $a < b$):

$\begin{cases} x>a, \\ x>b; \end{cases}$

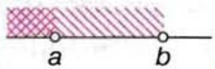



Решение: $(b; +\infty)$

$\begin{cases} x>a, \\ x<b; \end{cases}$


Решение: $(a; b)$

$\begin{cases} x<a, \\ x<b; \end{cases}$



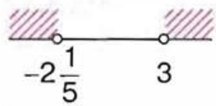

Решение: $(-\infty; a)$

$\begin{cases} x<a, \\ x>b; \end{cases}$


Решение: нет решений

*Пример 1.* Решить систему неравенств: $\begin{cases} 1-5x>12 \\ 6x-18>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-5x>12 \\ 6x-18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x>12-1 \\ 6x>18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{11}{5} \\ x>3 \end{cases} \rightarrow$$



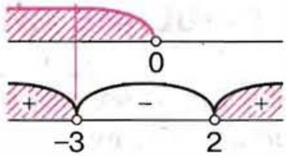

*Ответ:* $x \in \varnothing$.

*Пример 2.* Решить систему неравенств: $\begin{cases} x<0 \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$

Квадратный трехчлен разложим на множители: $x^2+x-6=0$ $\quad x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1 \cdot x_2=-6 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x-2)(x+3) > 0 \end{cases}$$




$a = 1 > 0$

*Пример 3.* Решить двойное неравенство: $-6 < 5x - 1 < 5$

$-6 < 5x - 1 < 5 \Leftrightarrow -6 + 1 < 5x < 5 + 1 \Leftrightarrow -5 < 5x < 6$

Разделим почленно неравенство на 5.

$5 > 0$, поэтому знаки неравенства сохраняются.

$-5 < 5x < 6 \Leftrightarrow -1 < x < 1{,}2$

*Ответ:* $x \in (-1;\ 1{,}2)$.

## РЕШЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

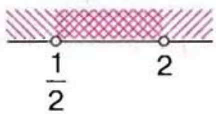
Если ставится задача найти множество всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств, то говорят, что надо решить совокупность неравенств.

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств совокупности обращается в верное числовое неравенство, называется **решением совокупности неравенств.** Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

Два неравенства образуют совокупность неравенств: $\left[\begin{array}{l} 3x - 5 < 1 \\ 2x + 3 > 4 \end{array}\right.$

*Пример.* Решить совокупность неравенств: $\left[\begin{array}{l} 3x - 5 < 1 \\ 2x + 3 > 4 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 5 < 1 \\ 2x + 3 > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x < 1 + 5 \\ 2x > 4 - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x < 6 \\ 2x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$




Объединяя множества решений двух неравенств получаем все действительные числа.

*Ответ:* $x \in \boldsymbol{R}$.

# АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

**Арифметической прогрессией** называется последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, в которой разность между последующим и предыдущим членами остается неизменной. Это число $d$ называется разностью арифметической прогрессии.

При $d > 0$ прогрессия является **возрастающей**.
*Пример:* $a_1 = 2$, $d = 3$.
Назвать первые пять членов:
2, 5, 8, 11, 14.

При $d < 0$ прогрессия является **убывающей**.
*Пример:* $a_1 = 12$, $d = -3$.
Назвать первые пять членов прогрессии: 12, 9, 6, 3, 0.

**Формула $n$-го члена арифметической прогрессии:**

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

*Задача.* Дана арифметическая прогрессия –2; 1; ... Найдите разность между ее двенадцатым и шестым членами.

*Решение.* $d = a_2 - a_1 = 1 - (-2) = 3;$

$a_{12} = a_1 + d(12-1) = -2 + 3(12-1) = 29;$

$a_6 = a_1 + d(6-1) = -2 + 3 \cdot 5 = 13;$

$a_{12} - a_6 = 29 - 13 = 16.$

*Ответ:* 16.

**Формула суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии:**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

*Задача.* В арифметической прогрессии $(c_n)$ известно, что $c_2 = -2$, $d = 3$. Найдите $c_1$ и сумму первых пяти членов.

*Решение.* $c_2 = c_1 + d$

$c_1 = c_2 - d = -2 - 3 = -5;\ c_1 = -5$

$c_5 = c_1 + d(5-1) = -5 + 3 \cdot 4 = 7;$

$$S_5 = \frac{(c_1 + c_5)}{2} \cdot 5 = \frac{-5+7}{2} \cdot 5 = 5.$$

*Ответ:* $c_1 = -5$; $S_5 = 5$.

1, 2, 3, 4, 5, ... — арифметическая прогрессия с $d = 1$. Это натуральный ряд чисел.

$$S_{100} = 1 + 2 \ldots + 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

**Геометрической прогрессией** называется последовательность чисел $b, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, в которой каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же неизменное число, не равное нулю. Это неизменное число $q$ называется знаменателем прогрессии.

При $|q| > 1$ прогрессия называется **возрастающей.**
*Пример.* $b_1 = 1$, $q = 2$.
Назвать первые пять членов геометрической прогрессии:
1, 2, 4, 8, 16.

При $|q| < 0$ прогрессия называется **убывающей.**
*Пример:* $b_1 = 24$, $q = \frac{1}{2}$.
Назвать первые пять членов геометрической прогрессии:
$24, 12, 6, 3, \frac{3}{2}$.

**Формула $n$-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$**

*Задача.* Дана геометрическая прогрессия –2; 1; ... Найдите частное от деления ее двенадцатого члена на шестой.

$$b_2 = b_1 \cdot q;\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2};$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1} = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{(-2)}{(-32)} = \frac{1}{16};$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{12-1} = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} = 2^{-10} = \frac{1}{1024};$$

$$b_{12} : b_6 = \frac{1}{1024} : \frac{1}{16} = \frac{16}{1024} = \frac{1}{64}$$

*Ответ:* 64.

**Формула суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:**

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ (|q| < 1)$$

**Формула суммы $n$ членов геометрической прогрессии:**

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1};\ S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ (q \neq 1)$$

*Задача.* Дана геометрическая прогрессия $b_1 = 5$, $q = 2$. Найдите сумму первых десяти членов:

$$b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 512 = 2560;$$

$$S_{10} = 5 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2-1} = 5 \cdot 1023 = 5115$$

*Ответ:* 5115.

# ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

**Логарифмом** положительного числа $b$ по основанию $a$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени $x$, в которую нужно возвести число $a$, чтобы получить $b$.

Обозначение: $\log_a b = x$.

Запись $\log_a b = x$ равносильна $a^x = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

| | | |
|---|---|---|
| $\log_2 8 = 3$ | $\Leftrightarrow$ | $2^3 = 8$ |
| $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ | $\Leftrightarrow$ | $3^{-2} = \frac{1}{9}$ |
| $\log_7 7 = 1$ | $\Leftrightarrow$ | $7^1 = 7$ |
| $\log_4 1 = 0$ | $\Leftrightarrow$ | $4^0 = 1$ |

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$4^{\log_4 5} = 5; \quad 2^{\log_2 8} = 8$$

## Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$)

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \rightarrow \log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \rightarrow \log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
3. $\log_a b^r = r\log_a b \rightarrow \log_2 8^4 = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

**Формула перехода к новому основанию:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 16}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = 4 : \frac{1}{2} = 8$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

**Десятичным логарифмом** числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

**Натуральным логарифмом** числа называют логарифм этого числа по основанию $e$ ($e = 2,718...$) и пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

# ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

**Логарифмирование** — это преобразование, при котором выражение с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

*Дано:* $x = \dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

*Найти:* $\lg x$.

*Решение.* $\lg x = \lg\dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)} = \lg(3a^2\sqrt[5]{b^3}) - \lg(c^4(a+b)) =$

По свойству логарифмов 2.

$= (\lg 3 + \lg a^2 + \lg\sqrt[5]{b^3}) - (\lg c^4 + \lg(a+b)).$

По свойству логарифмов 1.

Используя свойство логарифмов 3 и раскрывая скобки, получаем:

*Ответ:* $\lg x = \lg 3 + 2\lg a + \dfrac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b)$.

**Потенцирование** — это преобразование, обратное логарифмированию.

*Дано:* $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \dfrac{3}{7}\lg c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

*Найти* выражение для $x$.

*Решение.* Потенцируя получаем:

$$\lg x = \lg a^2 - \lg b^5 + \lg\sqrt[7]{c^3} = \lg\frac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}.$$

По свойству логарифмов 3. По свойствам логарифмов 1 и 2.

*Ответ:* $x = \dfrac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}$.

# ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

**Постоянная величина** — это такая величина, которая сохраняет неизменное значение.

**Переменная величина** — это такая величина, которая может принимать различные значения.

зависимые, независимые

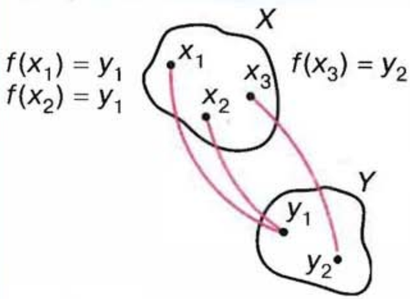
*Пример.*
Формула объема шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\frac{4}{3}, \pi$ — постоянные величины;
$R$ (радиус) — независимая переменная величина;
$V$ (объем шара) — зависимая переменная величина.

Чаще всего переменные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита: $x$, $y$, $z$, а постоянные первыми: $a$, $b$, $c$...

Переменная $y$ называется **функцией** от переменной $x$, если каждому значению $x$, принадлежащему некоторому множеству $X$, поставлено в соответствие единственное значение $y$ из множества $Y$.
Обозначение: $y = f(x)$




Множество $X$ — область определения функции $y = f(x)$.

Множество $Y$ всех значений, которые принимает переменная $y$, называется областью изменения (или областью значений) функции $y = f(x)$.

*Примеры.*
$y = kx$; $y = kx + b$; $y = \frac{c}{x}$;
$y = \sin x$; $y = x^2$; $y = ax^2 + bx + c$

$x$ — аргумент (или независимая переменная) функции $y = f(x)$.

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

**1.** Табличный способ — запись в виде таблицы конкретных значений переменной $x$ и соответствующих им значений переменной $y$.

*Пример.*

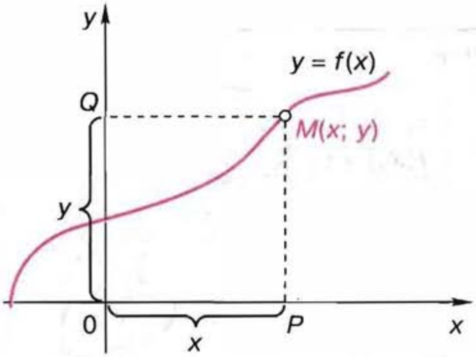
**Таблица наблюдения за температурой воздуха в течение суток**

| Время $t$ (час) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T °C | −5 | −5 | −3 | −2 | −2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | −4 | −6 |

**2.** Аналитический способ — запись функциональной зависимости в виде некоторой формулы.

*Примеры.* $y = x^3$; $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \sin x$; $y = \ln x$; $y = e^x$

**3.** Графический способ. Пусть задана функция $y = f(x)$.




Начало координат — точка $O$ (точка пересечения прямых $Ox$ и $Oy$);
$Ox$ — ось абсцисс;
$Oy$ — ось ординат;
точка $M(x; y)$;
$x = OP$ — абсцисса точки $M$;
$y = OQ$ — ордината точки $M$.
Величины $x$ и $y$ называются координатами точки $M$.

Каждой точке плоскости соответствует пара чисел $x$, $y$. Каждой паре (действительных) чисел $x$, $y$ соответствует точка $M$.

**Графиком функции** $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x; y)$, где $x$ пробегает область определения функции $f(x)$.

# ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Две функции $f$ и $g$ называются **взаимно обратными,** если формулы $y = f(x)$ и $x = g(y)$ выражают одну и ту же зависимость между переменными $x$ и $y$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

$y = 2x + 5$ и $x = \frac{y}{2} - \frac{5}{2}$

$y = x^3$; $x \geq 0$ и $x = \sqrt[3]{y}$

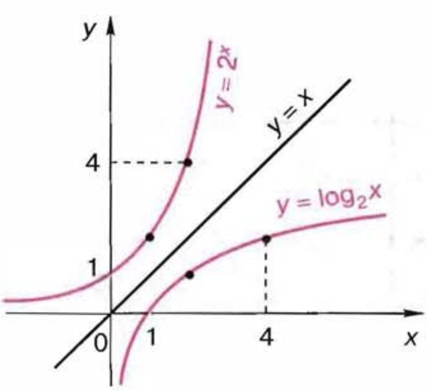
$y = 10^x$; и $x = \lg y$

Поскольку принято аргумент функции обозначать переменной $x$, а значение функции — переменной $y$, то обратную функцию для функции $y = f(x)$ записывают в виде $y = g(x)$.

| Функция | Обратная функция |
|---|---|
| $y = \log_2 x$ | $y = 2^x$ |
| $y = x^2$; $x \geq 0$ | $y = \sqrt{x}$ |
| $y = \sin x$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $y = \arcsin x$ |
| $y = \cos x$; $x \in [0; \pi]$ | $y = \arccos x$ |
| $y = \mathrm{tg}\, x$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | $y = \mathrm{arctg}\, x$ |
| $y = \mathrm{ctg}\, x$; $x \in (0; \pi)$ | $y = \mathrm{arcctg}\, x$ |

Функция имеет обратную, если функция строго возрастает или строго убывает (строго монотонная функция).

Чтобы получить обратную функцию от некоторых функций, уменьшают область определения функции так, чтобы область значений функции не изменилась.




Графики функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы угла $xOy$ (прямая $y = x$).

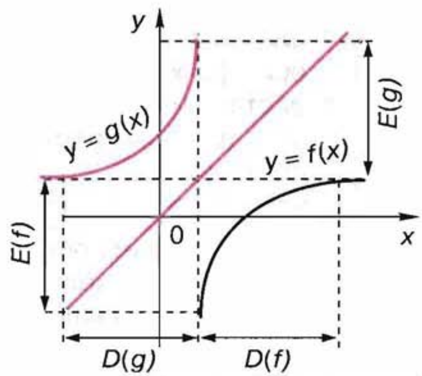
## Свойства взаимно обратных функций

**1. Тождества**

Пусть $f$ и $g$ — взаимно обратные функции. Это означает, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$ равносильны.

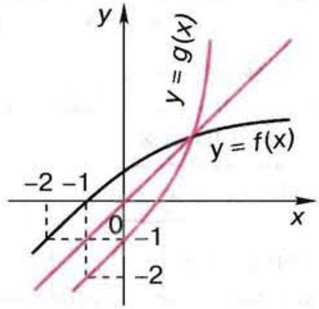
**2. Область определения**

Пусть $f$ и $g$ взаимно обратные функции. Область определения функции $f$ совпадает с областью значений функции $g$, и, наоборот, область определения функции $g$ совпадает с областью значений функции $f$.

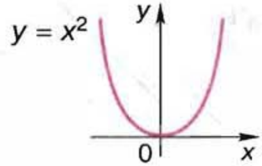



**3. Монотонность**

Если одна из взаимно обратных функций строго возрастает, то и другая строго возрастает.




# ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

| | |
|---|---|
| Функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если существует число $c > 0$, такое что $\lvert f(x)\rvert < c$ для любого $x$ из области определения функции. | $y = \cos x$; $\lvert\cos x\rvert \le 1$<br>$y = \sin x$; $\lvert\sin x\rvert \le 1$ |
| Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a, b)$, если для любых двух точек из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$; соответственно функция называется убывающей, если из неравенства $x_2 > x_1$, следует $f(x_2) < f(x_1)$. |  <br>$(-\infty;\ 0)$ функция убывает<br>$(0;\ +\infty)$ функция возрастает |

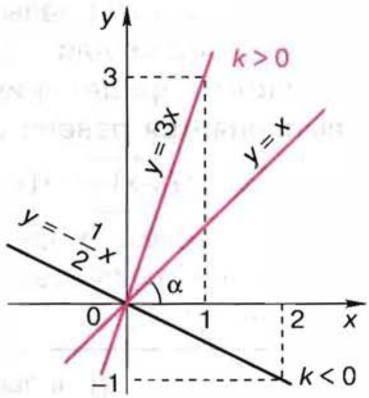
| | |
|---|---|
| Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого $x$ из области определения функции выполняется равенство: $\boxed{f(-x) = f(x)}$ График четной функции симметричен относительно оси $Oy$. | Четные функции: $y = \cos x$, т. к. $\cos(-x) = \cos x$; $y = x^2$, т. к. $(-x)^2 = x^2$ |
| Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого $x$ из области определения функции выполняется равенство: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ График нечетной функции симметричен относительно начала координат. | Нечетные функции: $y = x^3$, т. к. $(-x)^3 = -x^3$; $y = \sin x$, т. к. $\sin(-x) = -\sin x$; $y = \operatorname{tg} x$, т. к. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$, т. к. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ |
| Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения $x$ из области определения функции, числа $(x + T)$ и $(x - T)$ также входят в область определения и при этом выполняется равенство: $\boxed{f(x + T) = f(x)}$ Главным периодом (или просто периодом) принято называть наименьшее положительное число $T$, являющееся периодом функции. | Периодические функции: $y = \sin x$, $T = 2\pi$; $y = \cos x$, $T = 2\pi$; $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$; $y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$, т. к. соответственно: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$; $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ |

# ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

**Линейной функцией** называется функция $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — некоторые числа.

Прямопропорциональная зависимость между переменными $x$ и $y$: приводит к простейшей линейной функции $y = kx$.

### Свойства линейной функции $y = kx$ при $k \neq 0$




1. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. Корни — единственный корень $x = 0$.
3. Промежутки постоянного знака зависят от знака параметра $k$:
   а) $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$;
   $y < 0$ при $x < 0$;
   б) $k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$;
   $y < 0$ при $x > 0$.
4. Экстремумов нет.
5. Монотонность функции: если $k > 0$, то $y$ возрастает на всей числовой оси; если $k < 0$, то $y$ убывает на всей числовой оси.
6. Наибольших и наименьших значений нет.
7. Область значений — множество $\boldsymbol{R}$.
8. Четность — функция $y = kx$ нечетна.

Графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат. Коэффициент $k$ называется угловым коэффициентом этой прямой. Он равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси $x$: $k = \operatorname{tg}\alpha$. При положительных $k$ этот угол острый, при отрицательных — тупой.

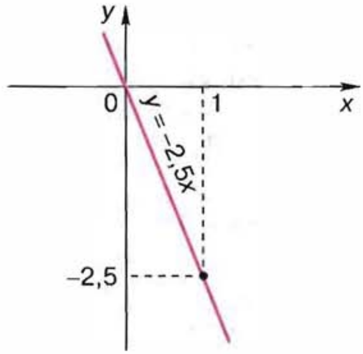
График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая. Для построения графика достаточно двух точек.

*Например:* $A(0;\, b)$ и $B\left(-\dfrac{b}{k};\, 0\right)$, если $k \neq 0$.

## Типовые задания

1. а) Постройте график функции $y = -2{,}5x$.

   б) Возрастающей или убывающей является эта функция?




а) Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат, поэтому достаточно взять еще одну точку (1; –2,5).

б) $k = -2{,}5$; $k < 0$ — функция $y = -2{,}5x$ является убывающей.

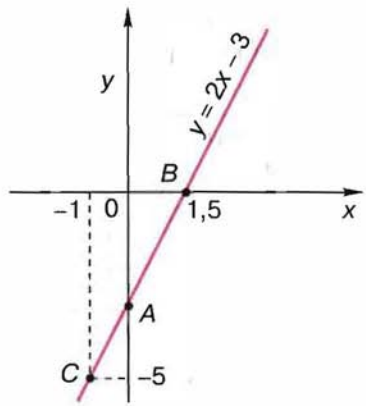
2. а) Постройте график функции $y = 2x - 3$.

   б) При каком значении $x$ значение $y$ равно –5?

   в) Укажите значения $x$, при которых $y < 0$.

   г) Укажите значения $x$, при которых $y > 0$.

   д) Укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.




а) Графиком функции является прямая. Для построения рассчитаем две точки прямой, расположенные на осях $Ox$ и $Oy$:
на оси $Oy$: пусть $x = 0$, $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$; (·) $A(0; -3)$;
на оси $Ox$: пусть $y = 0$, $0 = 2x - 3$. $2x = 3$, $x = 1{,}5$; (·) $B(1{,}5; 0)$.

б) При $x = -1$ значение $y = -5$ (по графику точка $C$).

в) $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1{,}5)$ — график функции лежит ниже оси $Ox$.

г) $y > 0$ при $x \in (1{,}5; +\infty)$ — график функции лежит выше оси $Ox$.

д) На оси $Ox$ точка $B(1{,}5; 0)$, на оси $Oy$ точка $A(0; -3)$.

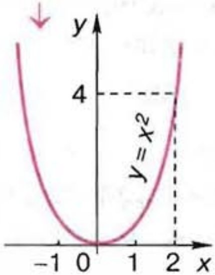
# КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $x$ и $y$ — переменные, а $a$, $b$, $c$ — заданные числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратичной функцией**.

Если $a = 1$, $b = c = 0$, то квадратичная функция $y = x^2$.

## Свойства квадратичной функции

| Функция | $y = x^2$ | $y = ax^2 + bx + c$ |
|---|---|---|
| 1. Область определения функции | множество $\boldsymbol{R}$ | множество $\boldsymbol{R}$ |
| 2. Координаты вершины параболы | $(0;\ 0)$ | $(x_0;\ y_0)$ $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ |
| 3. Корни функции (нули функции) | $x = 0$ | $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ при $b^2 - 4ac \geq 0$; нет корней при $b^2 - 4ac < 0$ |
| 4. Экстремумы функции | минимум в вершине | минимум в вершине, если $a > 0$ максимум в вершине, если $a < 0$ |
| 5. Область значений | $[0;\ +\infty]$ | $[y_0;\ +\infty)$, если $a > 0$ $(-\infty;\ y_0]$, если $a < 0$ |
| 6. Четность | четная | ни четная, ни нечетная |




$(-\infty;\ 0)$ функция убывает.
$(0;\ +\infty)$ функция возрастает.

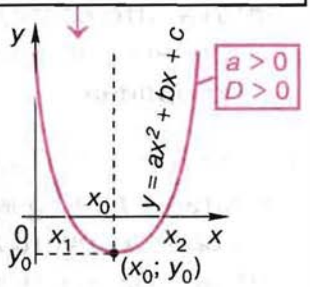


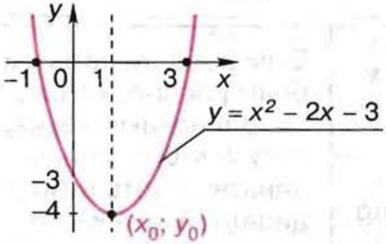
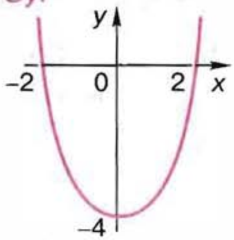

График функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из графика $y = x^2$ с помощью параллельного переноса.

График квадратичной функции — парабола.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

## Типовые задания

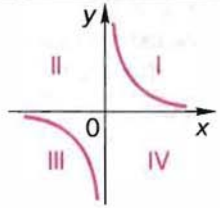
| | |
|---|---|
| 1. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$.<br>2. Укажите промежутки, в которых функция возрастает и убывает.<br>3. Укажите значения $x$, при которых $y > 0$.<br>4. Укажите наименьшее значение этой функции. | Построение:<br>$y = x^2 - 2x - 3$, при $a = 1$, $a > 0$. График функции — парабола, ветви которой направлены вверх.<br><br>1. Находим координаты вершины параболы:<br>$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2} = 1$,<br>$y_0(x_0) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$;<br>координаты вершины — $(1; -4)$.<br><br>2. Находим точку на оси $Oy$<br>$x = 0$; $y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$;<br>точка на оси $Oy$ — $(0; -3)$.<br><br>3. Находим нули функции (корни)<br>$y = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$;<br>по теореме Виета<br>$x_1 = 3$, $x_2 = -1$.<br>Точки на оси $Ox$ $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.<br><br>4. Дополнительную точку рассчитаем при $x = 4$:<br>$y(x) = 16 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$; $(\cdot)(4; 5)$ |
| 1. Осью симметрии параболы служит прямая $x = -\frac{b}{2a} = 1$.<br><br><br>2. При $-\infty < x < 1$ — функция убывает, при $1 < x < +\infty$ — функция возрастает.<br>3. $y > 0$ при $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$. График функции при этих значениях лежит выше оси $Ox$.<br>4. Наименьшее значение функции $y_0 = -4$. | |
| 1. Постройте график функции $y = x^2 - 4$.<br>2. Проходит ли график через точку $B(-9; 85)$?<br>Если точка лежит на графике, то подставляя ее координаты вместо переменных $x$ и $y$ в функцию, получаем верное равенство:<br>$85 = (-9)^2 - 4$; $85 \neq 81 - 4$.<br>*Ответ:* График через точку $B$ не проходит. | График функции $y = x^2 - 4$ получается из графика $y = x^2$ параллельным переносом вниз на $-4$ по оси $Oy$.<br><br> |

# ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

Переменные $x$ и $y$ связаны **обратно пропорциональной зависимостью** $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

$k$ — коэффициент обратной пропорциональности.

**Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Это гипербола.**



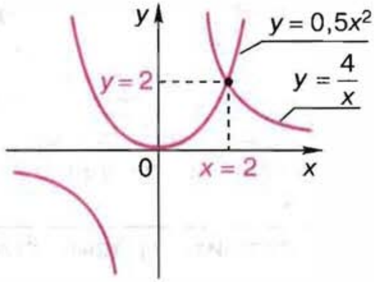

Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ есть множество всех чисел, отличных от нуля, т. е. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколь угодно близко к ним приближается, т. к. $x \neq 0$.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, если $k < 0$, то II и IV координатных четвертях координатной плоскости.

*Пример.* Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = 0,5x^2 \end{cases}$$




*Решение.* 1. $y = \frac{4}{x}$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2 | 4/3 | 1 |

График функции — гипербола, $k = 4$, $k > 0$, ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях.

2. $y = 0,5x^2$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |

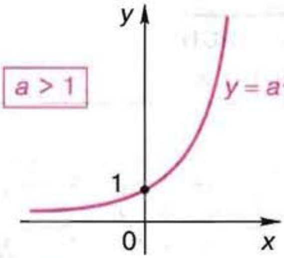
График функции — парабола $a = 0,5$, $a > 0$, ветви параболы направлены вверх.

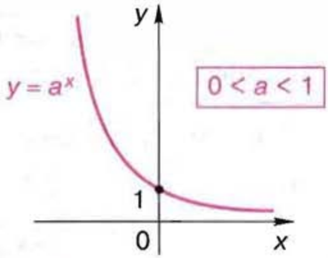
Графики функций пересекаются в одной точке, система имеет одно решение $x = 2$; $y = 2$.

*Ответ:* (2; 2).

# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где $a$ — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.




## Свойства показательной функции $y = a^x$

1. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. Область значений функции — множество всех положительных чисел.
3. Монотонность функции:

если $a > 1$ функция является возрастающей на множестве всех действительных чисел;

если $0 < a < 1$ функция является убывающей.

*Примеры.* $y = 2^x$, $a = 2$, $a > 1$ — функция возрастающая;

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $a = \frac{1}{2}$, $0 < a < 1$ — функция убывающая.

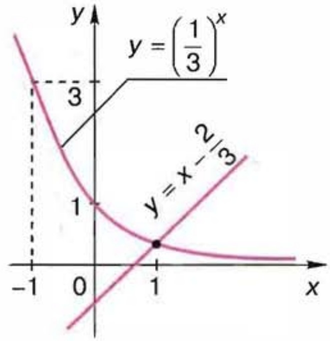
Графики всех показательных функций проходят через точку (0; 1) и расположены выше оси $Ox$, т. к. $a^x > 0$.

*Пример.* Решить графически уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$$

*Решение.* Построим графики функций

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ и } y = x - \frac{2}{3}.$$




Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения.

*Ответ:* $x = 1$.

# РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

## 1. Уравнения

**Теорема.** Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, что равносильно $x = b$.

*Примеры.* Решить уравнения:

$4 \cdot 2^x = 1$
$2^2 \cdot 2^x = 1$
$2^{2+x} = 2^0$
$2 + x = 0$
$x = -2$
*Ответ:* $x = -2$

$2^{3x} \cdot 3^x = 576$
$8^x \cdot 3^x = 576$
$24^x = 24^2$
$x = 2$
*Ответ:* $x = 2$

$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$
Пусть $3^x = t$. Данное уравнение сводится к квадратному $t^2 - 4t - 45 = 0$.
Корни уравнения находим по теореме Виета: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$.
$3^x = 9$, $x = 2$; $3^x = -5$ — не имеет корней.
*Ответ:* $x = 2$

$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$
$3^{x-2} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$
$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$
$3^{x-2} \cdot 25 = 25$
$3^{x-2} = 1$
$3^{x-2} = 3^0$
$x - 2 = 0$
$x = 2$
*Ответ:* $x = 2$

## 2. Неравенства

| $a > 1$, $y = a^x$ — возрастающая функция | | $0 < a < 1$, $y = a^x$ — убывающая функция | |
|---|---|---|---|
| $a^x > a^b$<br>$x > b$ | $a^x < a^b$<br>$x < b$ | $a^x > a^b$<br>$x < b$ | $a^x < a^b$<br>$x > b$ |

Решить неравенства:

$4^x < 16$
$4^x < 4^2$
$x < 2$
*Ответ:* $(-\infty; 2)$

$3^{x^2-4} \geq 1$
$3^{x^2-4} \geq 3^0$
$x^2 - 4 \geq 0$
$(x - 2)(x + 2) \geq 0$
$x \leq -2$; $x \geq 2$
*Ответ:* $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

$2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$
$2^{x-1} + 2^{x-1} \cdot 2^4 > 17$
$2^{x-1}(1 + 16) > 17$
$2^{x-1} > 1$
$2^{x-1} > 2^0$
$x - 1 > 0$
$x > 1$
*Ответ:* $(1; \infty)$

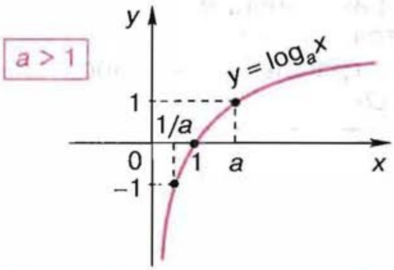
# ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Функция $y = \log_a x$, где $a$ — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмической функцией**.

## Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$

1. Область определения функции — множество всех положительных чисел ($x > 0$).
2. Область значений функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
3. Монотонность функции:
   если $a > 1$, то функция является возрастающей;
   если $0 < a < 1$, то функция является убывающей.
4. Промежутки постоянного знака:

| Значения аргумента | $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|---|
| $0 < x < 1$ | $y < 0$ | $y > 0$ |
| $x > 1$ | $y > 0$ | $y < 0$ |



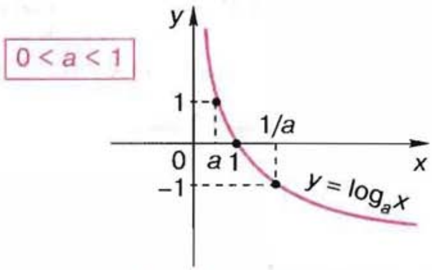
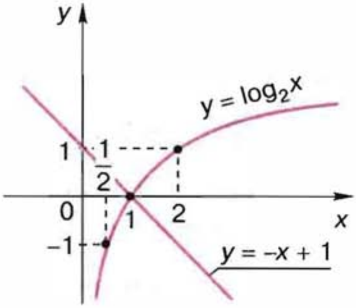




График логарифмической функции $y = \log_a x$ расположен правее оси $Oy$ и проходит через точку (1; 0).

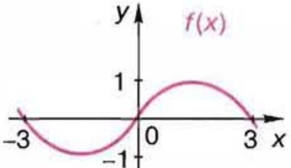
*Пример.* Решить графически уравнение $\log_2 x = -x + 1$.

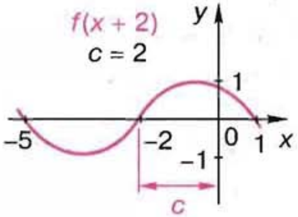
*Решение.* Построим графики функций $y = \log_2 x$ и $y = -x + 1$ на одной координатной плоскости. Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения.

*Ответ:* $x = 1$.



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ



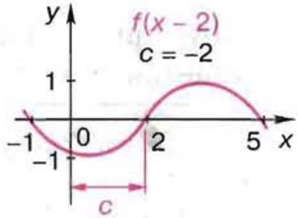




График функции $f(x+c)$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в отрицательном направлении оси $Ox$ на $|c|$ при $c > 0$ и в положительном направлении на $|c|$ при $c < 0$.

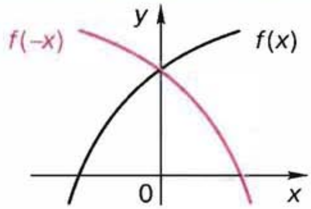



График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси $Oy$.

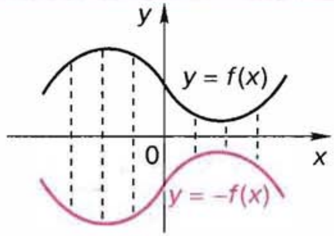



График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси $Ox$.

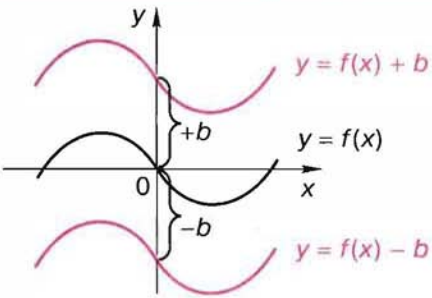
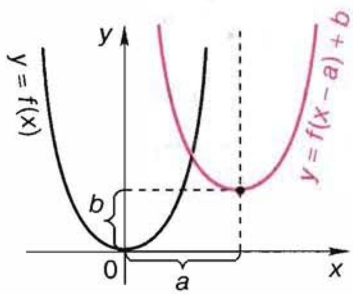



График функции $f(x) + b$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ на $b$ вверх по оси $Oy$. График функции $f(x) - b$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ на $b$ вниз по оси $Oy$.




При построении графика $y = f(x - a) + b$ нужно выполнить два параллельных переноса: в положительном направлении оси $Ox$ на $a$ и в положительном направлении оси $Oy$ на $b$.

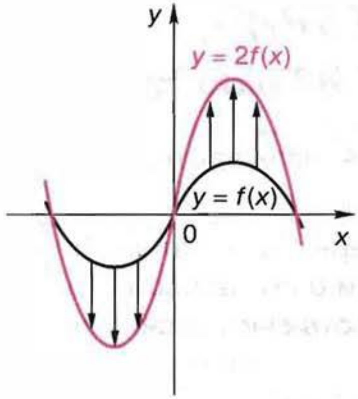



График функции $y = kf(x)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением в $k$ раз, если $k > 1$, и сжатием в $\frac{1}{k}$ раз, если $k < 1$ вдоль оси $Oy$.

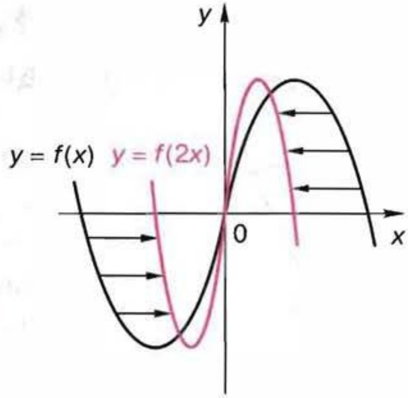
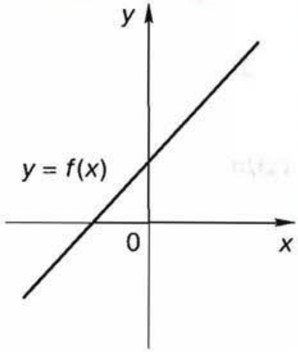
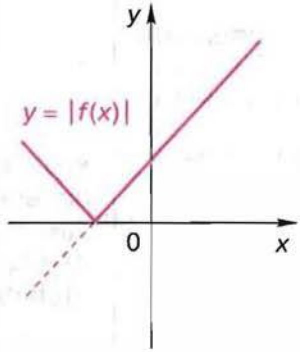



График функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз, если $k < 1$, или сжатием в $k$ раз, если $k > 1$ вдоль оси $Ox$.

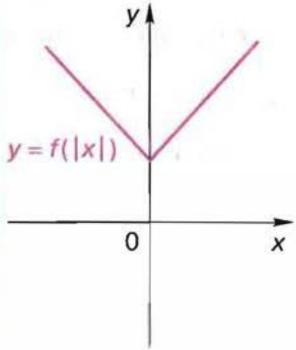



Используя график функции $y = f(x)$ построить графики:

$$y = |f(x)|$$
$$y = f(|x|)$$



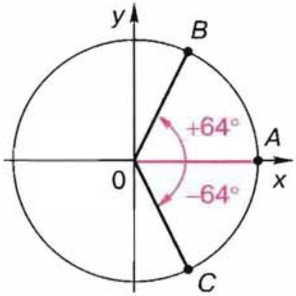

Часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью $Ox$, сохраняется, часть его, лежащая под осью $Ox$, отображается симметрично относительно оси $Ox$.




При $x > 0$ график $y = f(x)$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси $Oy$.

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## ГРАДУСНОЕ И РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ



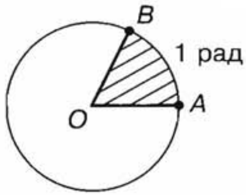

Углы и дуги могут измеряться в градусах и радианах.

Радиус $OA$ называется начальным радиусом.

Если повернуть начальный радиус около точки 0 по часовой стрелке, то угол поворота считается отрицательным.

Если повернуть начальный радиус около точки 0 против часовой стрелки, то угол поворота считается положительным.

Угол в 1° — это угол, который опишет начальный радиус, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки; $\frac{1}{60}$ часть градуса — минута; $\frac{1}{60}$ часть минуты — секунда.




Угол в 1 радиан есть центральный угол $BOA$, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности:

$$(OA = \overset{\smile}{AB}).$$

Радианная мера любого угла $AOB$ есть отношение длины дуги $AB$, описанной произвольным радиусом из центра $O$ и заключенной между сторонами угла, к радиусу $OA$ этой дуги.

| Углы в градусах | 360° | 180° | 90° | 60° | 45° | 30° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Углы в радианах | $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

$A$ — угол в градусах, $\alpha$ — угол в радианах.

Формула перехода от градусной меры угла в радианы:

$$\alpha(\text{рад}) = \frac{A\pi}{180}$$

Формула перехода от радианной меры угла к градусной:

$$A^\circ = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$$

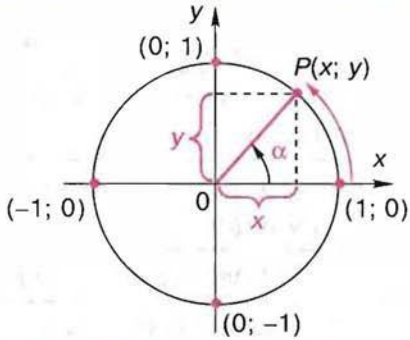
Тригонометрические функции (функции угла) определяются следующими равенствами:

синус: $\sin\alpha = y$

косинус: $\cos\alpha = x$

тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

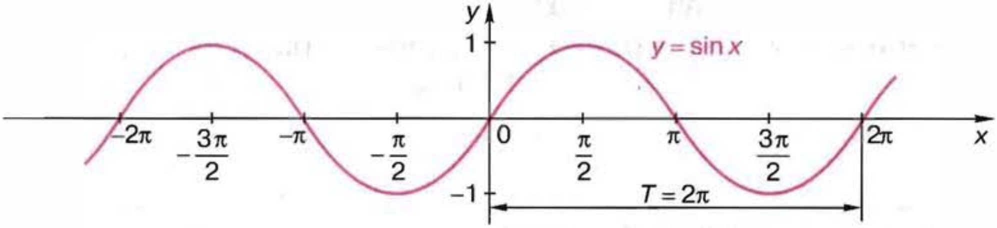



Окружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1, называется **единичной окружностью**.

## Значения тригонометрических функций для некоторых углов

| Градусы | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Радианы | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

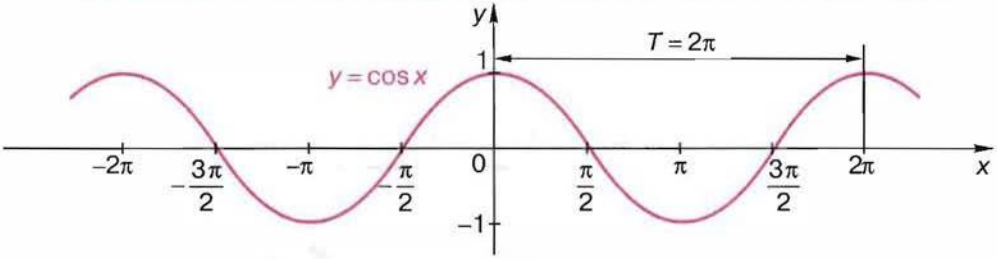
# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \sin x$ И ЕЕ ГРАФИК




## Основные свойства функции $y = \sin x$

| |
|---|
| Область определения функции — множество всех действительных чисел. |
| Множество значений функции — отрезок $[-1;\ 1]$, значит, синус — функция **ограниченная**. |
| Функция **нечетная**: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. |
| Функция **периодическая** с наименьшим положительным периодом $2\pi$: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, где $k \in \boldsymbol{Z}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. |
| $\sin x = 0$ при $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\sin x > 0$ (положительная) для всех $x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\sin x < 0$ (отрицательная) для всех $x \in (\pi + 2\pi k,\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция возрастает от $-1$ до $1$ на промежутках: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция убывает от $1$ до $-1$ на промежутках: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Наибольшее значение функции $\sin x = 1$ в точках: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Наименьшее значение функции $\sin x = -1$ в точках: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |

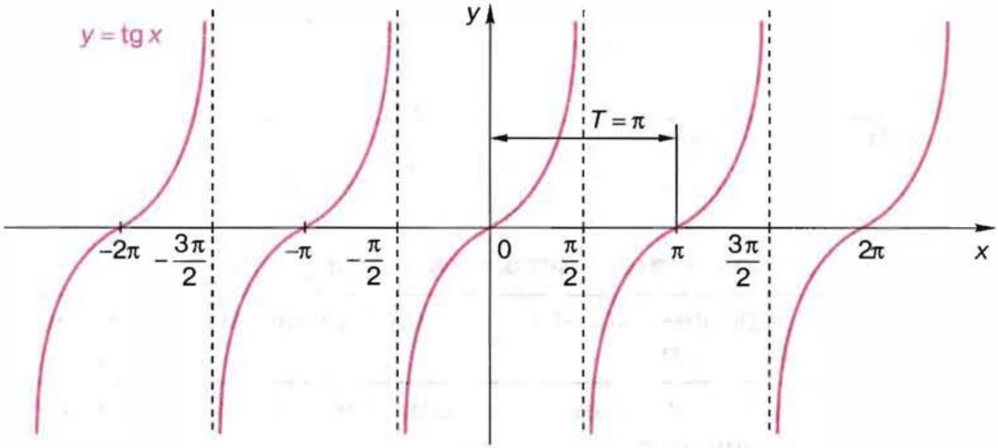
# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \cos x$ И ЕЕ ГРАФИК




## Основные свойства функции $y = \cos x$

| |
|---|
| Область определения функции — множество всех действительных чисел $x \in \boldsymbol{R}$. |
| Множество значений функции — отрезок $[-1; 1]$, значит, косинус — функция **ограниченная**. |
| Функция **четная**: $\cos(-x) = \cos x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. График функции симметричен относительно оси $Oy$. |
| Функция **периодическая** с наименьшим положительным периодом $2\pi$: $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, где $k \in \boldsymbol{Z}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. |
| $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\cos x > 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\cos x < 0$ для всех $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция возрастает от –1 до 1 на промежутках: $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k],\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция убывает от 1 до –1 на промежутках: $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k],\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Наибольшее значение функции $\cos x = 1$, в точках: $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Наименьшее значение функции $\cos x = -1$, в точках: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |

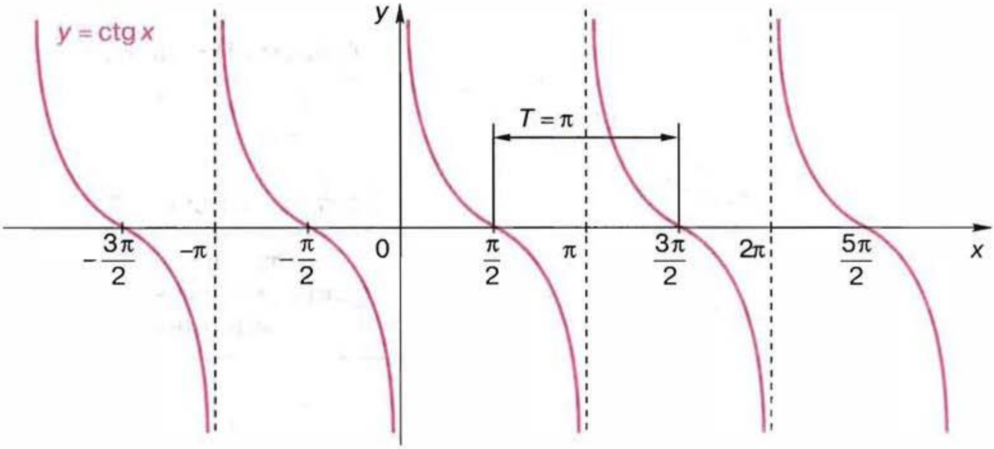
# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{tg} x$ И ЕЕ ГРАФИК




## Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

| |
|---|
| Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Множество значений функции — вся числовая прямая, таким образом, тангенс — функция **неограниченная**. |
| Функция **нечетная**: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех $x$ из области определения. |
| Функция **периодическая** с наименьшим положительным периодом $\pi$, т. е. $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$, $k \in \boldsymbol{Z}$ для всех $x$ из области определения. |
| $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция возрастает на промежутках: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |

# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{ctg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

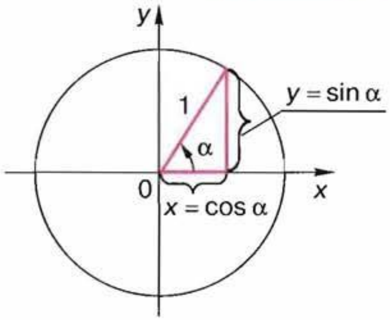



## Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

| |
|---|
| Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел $\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Множество значений функции — вся числовая прямая, таким образом, котангенс — функция **неограниченная**. |
| Функция **нечетная**: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ для всех $x$ из области определения. |
| Функция **периодическая** с наименьшим положительным периодом $\pi$, т. е. $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \boldsymbol{Z}$ для всех $x$ из области определения. |
| $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\operatorname{ctg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $\operatorname{ctg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |
| Функция убывает на каждом из промежутков $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. |

# СВЯЗЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

**1**




Теорема Пифагора

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\downarrow$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

**2**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

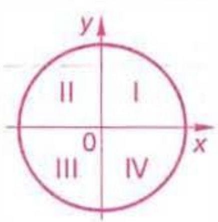
$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

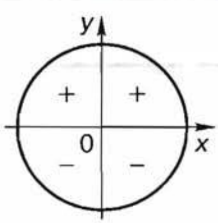
**3**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \longrightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

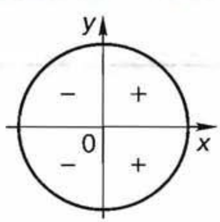
## Знаки тригонометрических функций



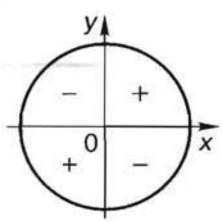

Нумерация координатных четвертей




Знаки синуса




Знаки косинуса




Знаки тангенса и котангенса

# ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ

Если известна одна из тригонометрических функций, то, используя формулы, можно вычислить все остальные тригонометрические функции угла, учитывая в какой четверти лежит заданный угол.

$\sin t = -\frac{3}{5}$

$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$

угол $t$ лежит в III четверти

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$;

$\cos t = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$, т. к. косинус в III четверти отрицателен.

$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}$.

$\cos t = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$

$\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

угол $\alpha$ лежит в IV четверти

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$;

$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, т. к. синус в IV четверти отрицателен.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = -2\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\operatorname{tg} x = -10$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

угол $x$ лежит во II четверти

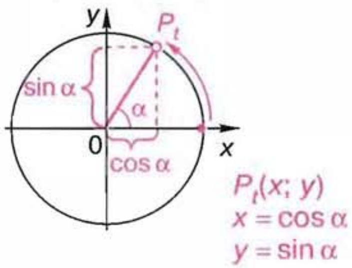
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + 100} = \frac{1}{101}$; $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{101}}$, т. к. косинус во II четверти отрицателен.

$\sin x = \operatorname{tg} x \cos x = \frac{10}{\sqrt{101}}$, т. к. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{10}$.

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{101}}$; $\sin x = \frac{10}{\sqrt{101}}$; $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{10}$.

# ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ




Вращательное движение точки $P_t$ по окружности — процесс периодический. Тригонометрические функции определены с помощью координат вращающейся точки, поэтому все **тригонометрические функции периодические**.

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k)$,
$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$,
$k = 0; \pm1, \pm2, \ldots$

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ являются периодическими с периодом $2\pi = 360°$.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi k)$,
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha + \pi k)$,
$k = 0; \pm1, \pm2, \ldots$

Функции $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ являются периодическими с периодом $\pi = 180°$.

Число $k$ показывает целое число оборотов, пройденное точкой, причем если $k$ — положительное ($k > 0$), то точка двигается против часовой стрелки, если $k$ — отрицательное ($k < 0$), то точка двигается по часовой стрелке.

*Примеры.*

1. Найти sin 765°.

$\sin 765° = \sin(2 \cdot 360° + 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Делим 765° на 360°: получаем 2 и остаток 45°.

*Ответ:* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Найти cos (–1170°).

$\cos(-1170°) = \cos 1170° = \cos(3 \cdot 360° + 90°) = \cos 90° = 0$

Знак «–» опускаем, т. к. функция косинус четная.

*Ответ:* 0.

# ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ являются нечетными. →

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Функция $\cos\alpha$ является четной. →

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

*Примеры.*

$$\cos(-390^\circ) = \cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-750^\circ) = -\operatorname{tg}750^\circ = -\operatorname{tg}(4\cdot 180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg}(-210^\circ) = -\operatorname{ctg}210^\circ = -\operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg}30^\circ = -\sqrt{3}.$$

# ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Тригонометрические функции углов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ могут быть выражены через функции угла $\alpha$ с помощью формул приведения.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

и т. д.

## Правило формул приведения

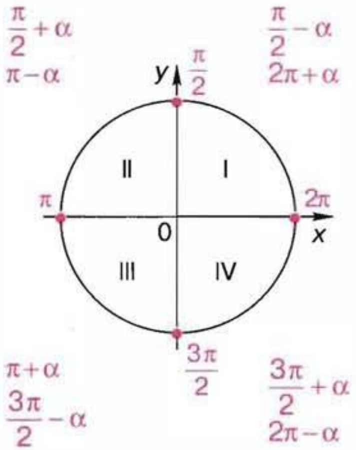
**I.** Для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется.

Для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

**II.** Функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция.

Угол $\alpha$ — считать острым.

## Примеры использования формул приведения




Приведите к тригонометрической функции угла $\alpha$.

Синус во II четверти положителен.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$$

Функция заменяется с синуса на косинус.

Котангенс угла во II четверти отрицателен.

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

Функция сохраняет название.

# ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

**1.** Формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

**2.** Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

**3.** Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta)&=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)&=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\end{aligned}}$$

**4.** Формулы котангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$$

## Формулы сложения для кратных аргументов

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

| | |
|---|---|
| $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ | |
| $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ | |
| $\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ |
| $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ | $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ |

Для функций половинного аргумента имеют место следующие соотношения (знак «+» или «–» выбирается в соответствии с тем, в какой четверти координатной плоскости (квадранте) находится угол — аргумент $\frac{\alpha}{2}$):

| |
|---|
| $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ |
| $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ |
| $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ |
| $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ |

## Формулы сложения для суммы и разности функций

| | |
|---|---|
| $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ | |
| $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ | |
| $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ | |
| $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ | |
| $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)$ | |
| $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ | $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$ | $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$ |

## ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

| |
|---|
| $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ |
| $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$ |
| $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$ |
| $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$ |

# ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функции

$y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{x = \arcsin y} y = \arcsin x$

$y = \cos x,\ x \in [0; \pi] \xrightarrow{x = \arccos y} y = \arccos x$

$y = \mathrm{tg}\, x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{x = \mathrm{arctg}\, y} y = \mathrm{arctg}\, x$

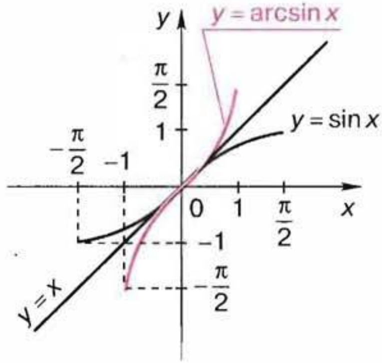
$y = \mathrm{ctg}\, x,\ x \in [0; \pi] \xrightarrow{x = \mathrm{arcctg}\, y} y = \mathrm{arcctg}\, x$

## $y = \arcsin x$

Область определения: $x \in [-1; 1]$.

Область значений: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в начале координат. Функция возрастает на всей области определения.

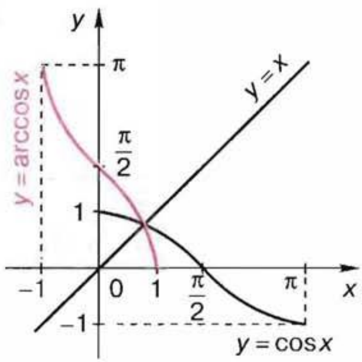



## $y = \arccos x$

Область определения: $x \in [-1; 1]$.

Область значений: $y \in [0; \pi]$.

Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая, ограниченная, пересекает ось $Oy$ в точке $y = \frac{\pi}{2}$, ось $Ox$ — в точке $x = 1$. Функция убывает на всей области определения.

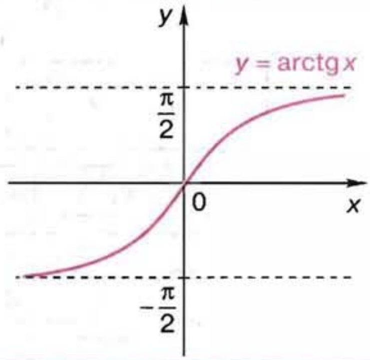


**$y = \operatorname{arctg} x$**

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$.

Область значений: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в начале координат. Функция возрастает на всей числовой прямой.

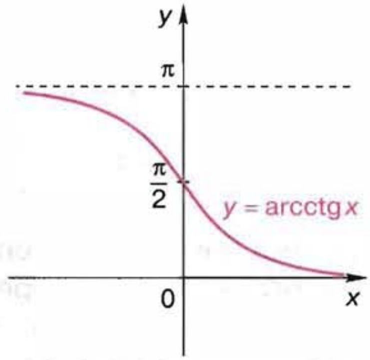



**$y = \operatorname{arcctg} x$**

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$.

Область значений: $y \in (0; \pi)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая, ограниченная, пересекает ось $Oy$ в точке $y = \frac{\pi}{2}$, ось $Ox$ не пересекает. Функция убывает на всей числовой оси.




## АРКСИНУС И АРККОСИНУС

Арксинусом числа $a$, если $|a| \leq 1$, называется угол $x$, лежащий на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$:

$$x = \arcsin a \Leftrightarrow \sin x = a,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Арккосинусом числа $a$, если $|a| \leq 1$, называется угол $x$, лежащий на отрезке $[0;\ \pi]$, косинус которого равен $a$:

$$x = \arccos a \Leftrightarrow \cos x = a,\ 0 \leq x \leq \pi$$

Запись $\arcsin a$ читается: угол (arc), синус которого равен $a$.

Запись $\arccos a$ читается: угол (arc), косинус которого равен $a$.

### Основные тождества

| | |
|---|---|
| $\sin(\arcsin a) = a$ | $\cos(\arccos a) = a$ |
| $\arcsin(\sin x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $\arccos(\cos x) = x$, если $x \in [0; \pi]$ |
| $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ | $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ |

*Примеры.*

$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\arcsin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos(-1) = \pi$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

## АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

Арктангенсом числа $a$ называется угол $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тангенс которого равен $a$:

$$x = \operatorname{arctg} a$$

Арккотангенсом числа $a$ называется угол $x \in [0; \pi]$, котангенс которого равен $a$:

$$x = \operatorname{arcctg} a$$

### Основные тождества

| | |
|---|---|
| $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ | $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$ |
| $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $x \in [0; \pi]$ |
| $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ | $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ |

# ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

**1.** $\sin x = a$

**2.** $\cos x = a$

**3.** $\operatorname{tg} x = 0$

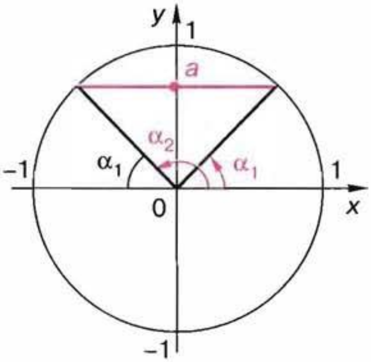
**4.** $\operatorname{ctg} x = a$

Уравнения **1** и **2** имеют решения, если $-1 \le a \le 1$.

**1.** $\sin x = a$

$\alpha_1 = \arcsin \alpha$

$\alpha_2 = \pi - \alpha_1$




*Решение.*

$\boxed{x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2 = \pi - \alpha_1}$

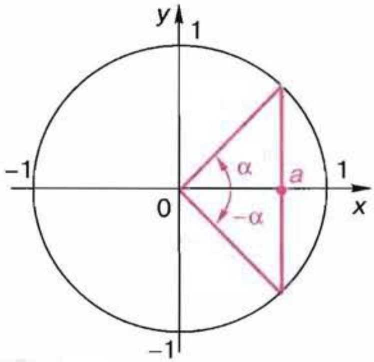
Учитывая периодичность функции синус, получим множества корней уравнения $\sin x = a$.

$$\boxed{\begin{gathered} x_1 = \alpha_1 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \\ x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{gathered}}$$

$\alpha_1 = \arcsin a$

$$\boxed{\begin{gathered} x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \\ k \in \boldsymbol{Z} \end{gathered}}$$

**2.** $\cos x = a$




*Решение.*

$\boxed{x_1 = \alpha,\ x_2 = -\alpha}$

Учитывая периодичность функции косинус, получим множества корней уравнения $\cos x = a$.

$$\boxed{\begin{gathered} x_1 = \alpha + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \\ x_2 = -\alpha + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{gathered}}$$

$\alpha = \arccos a$

$$\boxed{\begin{gathered} x = \pm\arccos a + 2\pi k, \\ k \in \boldsymbol{Z} \end{gathered}}$$

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ имеют решения при любом $a$, так как область значений тангенса и котангенса — вся числовая ось.

Учитывая периодичность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (период $\pi$), множества решений уравнений запишем формулами:

**3.** $\boxed{\operatorname{tg} x = a} \longrightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}}$

**4.** $\boxed{\operatorname{ctg} x = a} \longrightarrow \boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}}$

## Частные случаи решения уравнений 1 и 2

| Уравнение | Решение |
|---|---|
| $\sin x = 0$ | $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |
| $\sin x = 1$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |
| $\sin x = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |
| $\cos x = 0$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |
| $\cos x = 1$ | $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |
| $\cos x = -1$ | $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ |

# РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 1. Уравнения, сводящиеся к квадратам

*Схема решения тригонометрического уравнения*

Выполнить преобразования, приводящие к уравнению с одной функцией. → Решение квадратного уравнения относительно данной функции. → Решение простейших тригонометрических уравнений: **1—4**

$$2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} 2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$$

$$\to 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = y} 2y^2 + 5y - 3 = 0 \to y_1 = -3,\quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$\sin x = -3$ → нет решения

$$\sin x = \frac{1}{2} \to x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \to x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

## 2. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

$$\sin 2x - \sin x = 0 \xrightarrow{\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x} 2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\to \sin x\,(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \to x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \to \cos x = \frac{1}{2} \to x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

## 3. Решение однородных тригонометрических уравнений

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$) называется однородным уравнением первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Уравнение решается делением обеих его частей на $\cos x \neq 0$, в результате получается уравнение вида $a\operatorname{tg} x + b = 0$.

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \xrightarrow{:\cos x} 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \rightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c = 0$, где $a$, $b$, $c$ — некоторые числа, называется однородным уравнением второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Если $c \neq 0$, то его представляют $c \cdot 1 = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$, $\cos x \neq 0$. В результате получаем квадратное уравнение относительно функции $\operatorname{tg} x$.

$$22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7$$

$$22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0 \quad : \cos^2 x$$

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0$$

$$\operatorname{tg} x_1 = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{tg} x_2 = \frac{15}{7} \rightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

## 4. Решение уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$, где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ методом вспомогательного аргумента

Решить уравнение $a\sin x + b\cos x = c$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Введем вспомогательный угол $\varphi$ по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin x\sin\varphi + \cos x\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Получили простейшее тригонометрическое уравнение **2** относительно $(x-\varphi)$.

*Пример.* Решить уравнение:

$6\sin x + 8\cos x = 3$ → $a = 6,\ b = 8,\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$$\frac{6}{10}\sin x + \frac{8}{10}\cos x = \frac{3}{10}$$

$\cos\varphi = 0{,}8$
$\sin\varphi = 0{,}6$

$$\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = 0{,}3$$

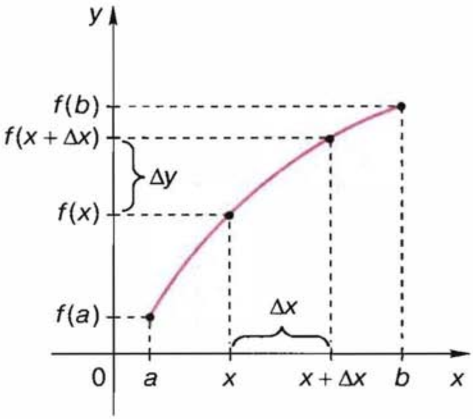
$\cos(x-\varphi) = 0{,}3$ → $x - \varphi = \pm\arccos 0{,}3 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$$x = \varphi \pm \arccos 0{,}3 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

$\xrightarrow{\varphi = \arccos 0{,}8}$ $x = \arccos 0{,}8 \pm \arccos 0{,}3 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

# НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

## ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ




Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция, определенная на интервале $(a; b)$.
$\Delta x$ — приращение аргумента;
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — приращение функции в точке $x$.

**Производной** функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначение: $y'$ или $f'(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция, имеющая производную в точке $x$, называется дифференцируемой в этой точке; операция нахождения производной называется дифференцированием. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется дифференцируемой на этом интервале.

*Пример.*

Функция $f(x) = x$ дифференцируема при $x \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

# ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

| Функция | Производная | Функция | Производная | Функция | Производная |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ (const) | $0$ | $\log_a x$ | $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x$ | $1$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | | |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | | |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | | | | |

## ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $k$ — постоянное число, $u(x)$ и $v(x)$ две функции, дифференцируемые на некотором интервале $(a; b)$.

1. $(ku \cdot (x))' = k \cdot u'(x)$
Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(5x)' = 5$$
$$\left(\frac{1}{6}\sin x\right)' = \frac{1}{6}\cos x$$
$$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
Производная алгебраической суммы функций равна сумме их производных (правило справедливо для любого конечного числа слагаемых).

$$y = x^3 + 4x^2 + 7x + 1$$
$$y' = (x^3)' + 4(x^2)' + 7(x)' + (1)' = 3x^2 + 8x + 7$$

3. $(uv)' = u'v + v'u$
Производная произведения двух функций.

$$y = x^2 \cdot \sin x$$
$$y' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Производная частного двух функций.

$$y = \frac{x^3}{\sin x}; \ \sin x \neq 0$$

$$y' = \frac{(x^3)' \sin x - (x^3)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$$

## ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y$ есть функция от $u$: $y = F(u)$, где $u = f(x)$, т. е. если $y$ зависит от $x$ через промежуточный аргумент $u$, то $y = F(u) = F(f(x))$ называется функцией от функции или сложной функцией.

$$y'(x) = F'(u)\,u'(x)$$

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной.

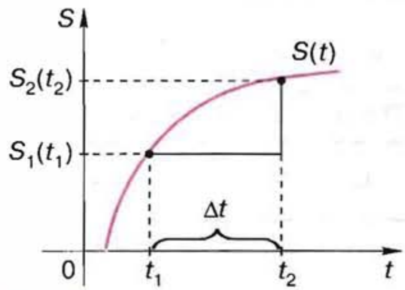
### Производные сложных функций $u = f(x)$

| Функция | Производная | Функция | Производная |
|---|---|---|---|
| $(u)^n$ | $n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ | $\ln u$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{1}{u^2} \cdot u'$ | $\sin u$ | $(\cos u)\,u'$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\cos u$ | $(-\sin u)\,u'$ |
| $a^u$ | $a^u \ln a \cdot u'$ | $\operatorname{tg} u$ | $\frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| $e^u$ | $e^u \cdot u'$ | $\operatorname{ctg} u$ | $-\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| $\log_a u$ | $\frac{u'}{u \cdot \ln a}$ | $\sqrt[n]{u}$ | $\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$ |

Примеры. Найти производные следующих функций:

| | |
|---|---|
| $y = (x^2 + 3x)^3$ | $u = x^2 + 3x,\ u' = 2x + 3$<br>$y = u^3,\ y' = (u^3)' = 3u^2u' = 3(x^2 + 3x)^2(2x + 3)$ |
| $y = e3x$ | $u = 3x,\ u' = 3$<br>$y = e^u,\ y' = (e^u)' = e^u u' = 3e^{3x}$ |
| $y = \sin 2x$ | $u = 2x,\ u' = 2$<br>$y = \sin u,\ y' = (\sin u)' = (\cos u)\,u' = 2\cos 2x$ |
| $y = \ln(2x + 1)$ | $u = 2x + 1,\ u' = 2$<br>$y = \ln u,\ y' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x+1}$ |
| $y = \sqrt{x^3 + 4x}$ | $u = x^3 + 4x,\ u' = 3x^2 + 4$<br>$y = \sqrt{u},\ y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$ |

## ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ




Пусть точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, где $S$ — перемещение точки за время $t$.

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t}$$ — средняя скорость точки за промежуток времени $[t_1; t_2]$.

**Мгновенная скорость** точки в данный момент времени $t_1$ равна значению производной от закона движения.

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t}$$

Такие величины как перемещение, скорость и ускорение при движении точки связаны между собой.

Производную от производной называют производной второго порядка или второй производной.

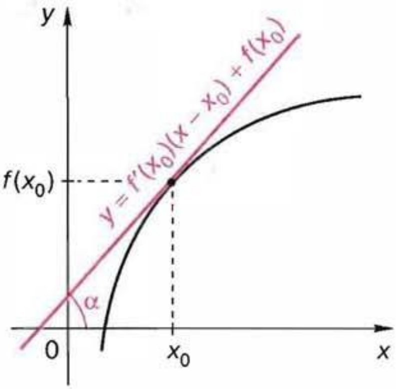
$$v(t) = S'(t)$$
$$a(t) = v'(t) =$$
$$= (S'(t))' = S''(t)$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции в точке $x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $(x_0;\ f(x_0))$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$k$ — угловой коэффициент касательной.




Уравнение касательной к графику $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x_0;\ f(x_0))$, имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

*Пример.*

Найти уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

*Решение.*

$y' = -2x$

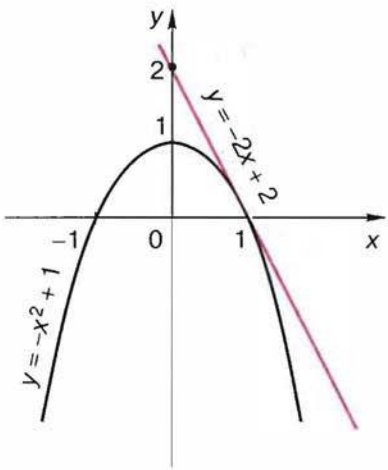
$y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$

$y_0(1) = -1^2 + 1 = 0$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

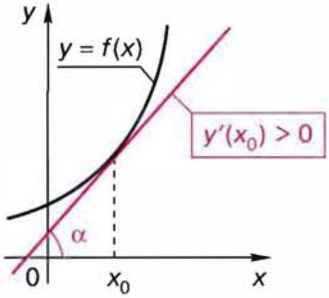
$$\downarrow$$

$$\boxed{y = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2}$$

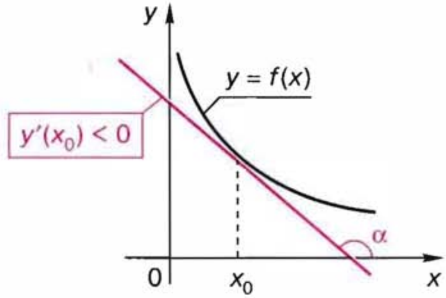


# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

## Возрастание и убывание функции




$0 < \alpha < 90°$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$




$90° < \alpha < 180°$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$

$\delta$-окрестностью (читается «дельта-окрестностью») точки $x_0$ на числовой оси называется интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$.

Промежутками монотонности функции $y = f(x)$ называются промежутки, на которых функция возрастает или убывает.

Теорема (о монотонности функции). Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала имеет положительную производную $(f'(x) > 0)$, то она возрастает на этом интервале, а если отрицательную производную $(f'(x) < 0)$, то она убывает.

*Пример.*

Найти промежутки монотонности функции $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

*Решение.*

Область определения функции: $x \in \boldsymbol{R}$

$f'(x) = 10x - 3$ $\quad$ $f'(x) < 0,\ 10x - 3 < 0,\ x < 0{,}3;$

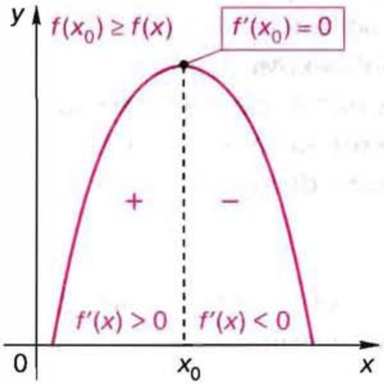
$f'(x) > 0,\ 10x - 3 > 0,\ x > 0{,}3.$

*Ответ:* в промежутке $(-\infty;\ 0{,}3]$ — функция убывает,

в промежутке $[0{,}3;\ +\infty]$ — функция возрастает.

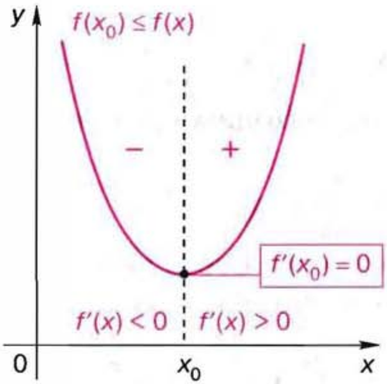
(Точка $x = 0{,}3$ включается в промежутки монотонности, поскольку в этой точке функция определена и непрерывна.)

## Экстремумы функции




Точка $x_0$ называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех $x$, лежащих в окрестности этой точки, выполняется неравенство:

$$f(x) \leq f(x_0)$$



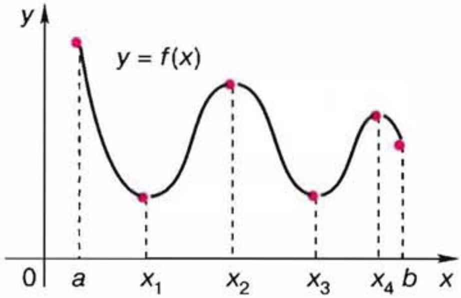

Точка $x_0$ называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех $x$, лежащих в окрестности этой точки, выполняется неравенство:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Точки минимума и максимума функции называются ее **точками экстремума**, а значения функции в этих точках — **экстремумами** данной функции.

Критическими точками функции $y = f(x)$ называются точки, в которых ее производная либо не существует, либо равна нулю.

Теорема (об экстремумах дифференцируемой функции). Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке $x_0$ экстремум, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 0$, и достаточно, чтобы $f'(x)$ меняла знак при переходе через точку $x_0$ (если слева от $x_0$ имеем $f'(x) < 0$, а справа $f'(x) > 0$, то в точке $x_0$ будет минимум, если наоборот — то максимум.




Для функции $f(x)$ $x_2$, $x_4$ — точки максимума. Точки $a$ и $b$ не считаются точками экстремума функции $f$, так как у этих точек нет окрестностей, целиком входящих в область определения функции.

*Пример.*

Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках. Указать интервалы монотонности.

*Решение.*

1. Находим производную функции:

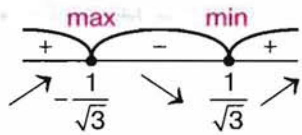
$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. Приравниваем производную к нулю, находим критические точки:

$$3 \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0; \; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Наносим критические точки на числовую ось и указываем знак производной функции в полученных промежутках.

Стрелкой указываем, какая по монотонности функция на данном интервале.




В точках $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет экстремумы:

в точке $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ максимум; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

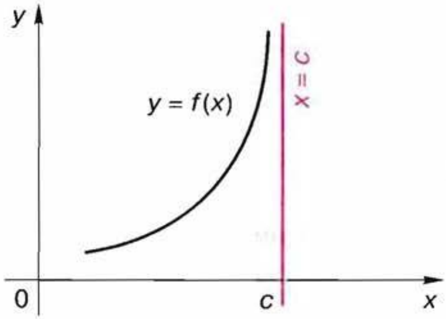
в точке $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ минимум; $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Функция возрастает на интервалах $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$;

функция убывает на интервале $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

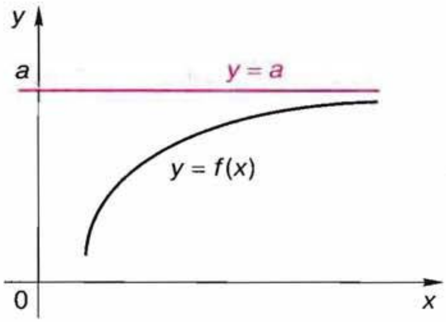
# АСИМПТОТЫ

Прямая называется **асимптотой графика функции** $y = f(x)$, если график функции приближается к этой прямой, но никогда ее не пересекает.



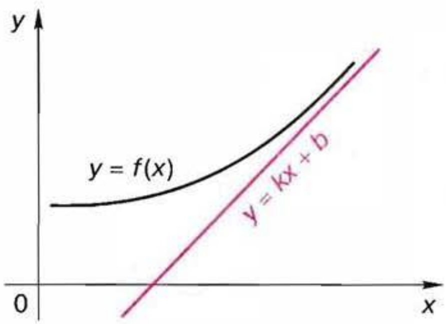

Прямая $x = c$ является вертикальной асимптотой графика $y = f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \to c \\ (x>c)}} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to c \\ (x<c)}} f(x) = \infty$$




Прямая $y = a$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = a$$




Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx) = b \end{cases}$$

# ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

1. Нахождение области определения и области значений функции.
2. Исследование функции на четность.
3. Исследование функции на периодичность.
4. Определение точек пересечения графика функции с осями координат и промежутков знакопостоянства.
5. Нахождение асимптот графика функции.
6. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
7. Определение точек экстремумов функции.
8. Построение графика.

*Пример.*

Исследовать функцию $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$ и построить ее график.

1. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$. Область определения — множество $\mathbf{R}$.

2. Вычислим функцию при двух симметричных значениях аргумента $x=1$ и $x=-1$.

$$\left.\begin{aligned} y(1)&=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-1=-1\frac{1}{12} \\ y(-1)&=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1=-\frac{5}{12} \end{aligned}\right\}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. Находим точки пересечения графика с осями:

а) с осью $Ox$:

$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2=0,\ \ 3x^4-4x^3-12x^2=0;$

$x^2(3x^2-4x-12)=0;\ \ x_{1,2}=0;\ \ x_3\approx-1{,}4;\ \ x_4\approx2{,}8;$

график пересекает ось $Ox$ в точках: $(0;\ 0)$, $(-1{,}4;\ 0)$, $(2{,}8;\ 0)$;

б) с осью $Oy$: при $x=0$, $y=0$, график пересекает ось $Oy$ в точке $(0;\ 0)$.

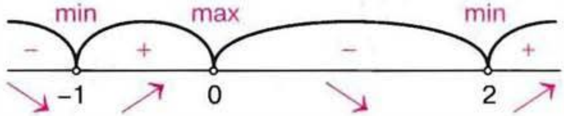
4. Находим производную функции:

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = (x+1)(x-2)x.$$

Приравнивая производную нулю, получим критические точки:

$$f'(x) = 0,\ (x+1)(x-2)x = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Изображаем критические точки на числовой оси. Критические точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$.




Укажем знак производной на полученных промежутках, решив неравенство $(x+1)(x-2)x > 0$.

Функция убывает на интервалах $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$;
функция возрастает на интервалах $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

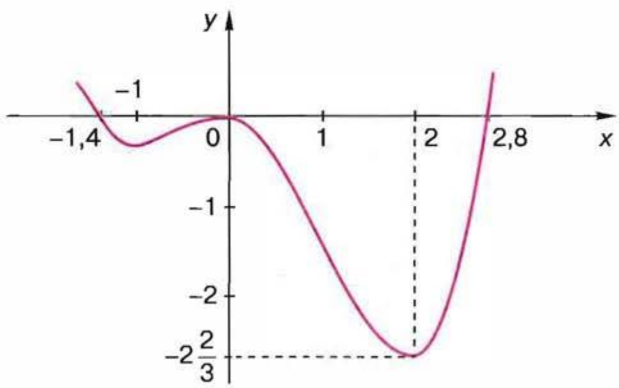
5. Вычисляем координаты точек экстремумов функции:

$$\left.\begin{aligned} &y(-1) = -\frac{5}{12} \\ &y(0) = 0 \\ &y(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 = -2\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

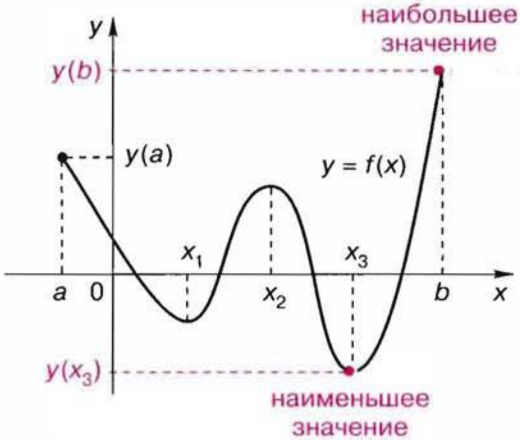
точка максимума: $(0; 0)$;

точки минимума: $\left(-1; -\frac{5}{12}\right)$; $\left(2; -2\frac{2}{3}\right)$.

6.



# НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ




1. Найти $f'(x)$ и критические точки функции, лежащие внутри отрезка.

2. Вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка.

3. Выбрать наименьшее и наибольшее значения функции.

Функция $f$ определена на отрезке $[a; b]$.

*Пример.*

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[-2; -0,5]$.

1. $y'(x) = -6x^2 - 6x$ — приравнивая производную нулю, находим критические точки:

$$-6x^2 - 6x = 0,\ -6x(x + 1) = 0,\ x = 0 \text{ и } x = -1.$$

В промежутке $[-2; -0,5]$ лежит только одна критическая точка $x = -1$.

2. Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y(-2) = -2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 4 = 8;$$
$$y(-0,5) = -2 \cdot (-0,5)^3 - 3 \cdot (-0,5)^2 + 4 = 3,5;$$
$$y(-1) = -2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 3.$$

3. Наибольшее значение функции на заданном отрезке — 8, наименьшее — 3.

# ПЕРВООБРАЗНАЯ

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией от $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех $x$ из этого промежутка выполняется условие:

$$F'(x) = f(x)$$

Операция, обратная дифференцированию, называется **интегрированием**. Выполняя интегрирование, мы находим первообразную функцию $F(x)$, используя формулы интегрирования (таблица первообразных).

## Таблица первообразных

| Функция | Первообразная |
|---|---|
| $1$ | $x + c$ |
| $x^p,\ p \neq -1$ | $\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c$ |
| $\dfrac{1}{x},\ x > 0$ | $\ln x + c$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $(kx + b)^p,\ p \neq -1,\ k \neq 0$ | $\dfrac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + c$ |
| $\dfrac{1}{kx + b},\ kx + b > 0$ | $\dfrac{1}{k}\ln(kx + b) + c$ |
| $e^{kx+b},\ k \neq 0$ | $\dfrac{1}{k}e^{kx+b} + c$ |
| $\sin(kx + b),\ k \neq 0$ | $-\dfrac{1}{k}\cos(kx + b) + c$ |
| $\cos(kx + b),\ k \neq 0$ | $\dfrac{1}{k}\sin(kx + b) + c$ |

$c$ — произвольная постоянная.

## Правила интегрирования

| | |
|---|---|
| $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. $G(x)$ — первообразная функция от $g(x)$ на некотором промежутке. $\rightarrow$ | $F(x) \pm G(x)$ — первообразная функции $f(x) \pm g(x)$. |
| Функция $aF(x)$ является первообразной функцией от $af(x)$, где $a$ — постоянная. | |

## Типовые задания

Найти все первообразные функции.

| Функция | Первообразная |
|---|---|
| $2x^5 - 3x^2$ | $\frac{2 \cdot x^{5+1}}{5+1} - \frac{3 \cdot x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^6}{3} - x^3 + c$ |
| $3\cos x - 4\sin x$ | $3\sin x - 4 \cdot (-\cos x) + c =$ $= 3\sin x + 4\cos x + c$ |
| $1 + 3e^x - 4\cos x$ | $x + 3e^x - 4\sin x + c$ |
| $\sin(2x + 3)$ | $\frac{1}{2}\cos(2x+3) + c$ |
| $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ | $2\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + c$ |

*Пример.*

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M$:

| | |
|---|---|
| $f(x) = 2x + 3$ <br> $(\cdot)M(1;\ 2)$ | $F(x) = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 3x + c = x^2 + 3x + c$ <br> Подставляя координаты точки в первообразную функцию, находим постоянную $c$: <br> $F(x) = x^2 + 3x + c$; <br> $2 = 1^2 + 3 \cdot 1 + c$; $c = -2$. <br> *Ответ:* $F(x) = x^2 + 3x - 2$. |

Первообразные функции находим, используя правила интегрирования и формулы из таблицы первообразных.